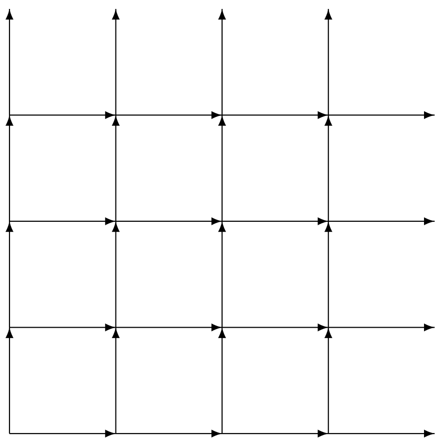
Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #1 (dado na 5^a feira, 5 março).

Consideramos percolação orientada sobre uma rede infinita (olhe a diagrama).



Cada elo horizontal está aberto a direita com a probabilidade ε e está fechado a esquerda sempre.
Cado elo vertical está aberto para cima com a probabilidade ε e está fechado para baixo sempre.
Cado elo est aberto/fechado independemente de todos os otros.
O sítio $(0, 0)$ é a unico fonte do liquido.

Chamamos um sítio (m, n) *molhado* se existe um caminho aberto do $(0, 0)$ a (m, n).
Dizemos que percolação a infinito ocorra se a conjunto do sítios molhados está infinito.

Dever de casa: Prove que se $\varepsilon < 1/2$ então a probabilidade da percolação a infinito é zero.

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #2 (dado na 6^a feira, 6 março).

Seja $S = \{0,1\}^Z$ o conjunto de configurações (i.e. bi-infinitas seqüências de zeros e uns). Um conjunto $C \subset S$ de forma

$$C = \{x \in S \mid x_{i_1} = a_{i_1}, \ldots, x_{i_n} = a_{i_n}\}$$

é chamado um *cilindro*. Denotamos $M = M(S)$ o conjunto de medidas de probabilidade (i.e. normalizadas) sobre S, i.e. sobre σ-algebra gerada pelo cilindros. Se $\mu_n,\ \mu \in M$, diremos que $\mu_n \to \mu$ se $\mu_n(C) \to \mu(C)$ para cada cilindro C.

Dever de casa a). Provar que M é compacto, i.e. qualquer seqüência de medidas de M tem uma subseqüência convergente.

Dica: Enumeramos tudos cilindros: $C_1, C_2, C_3, \ldots$. Tomamos alguma seqüência $\mu_n \in M$. Para cado n formamos uma subseqüência de μ_n, qual esta uma subseqüência de prévio e qual converge sobre $C_1, \ldots, C_n$. Depois toma diagonal.

Dado probabilidades de transição $\theta^v_{x,y,z}$ para $x, y, z, v \in \{0,1\}$, onde $\theta^0_{x,y,z} + \theta^1_{x,y,z} \equiv 1$, tem um operador $P\ :\ M \to M$ definido assim: Para alguma configuração $a \in S$ definimos Pa com uma medida, cujas componentes $x_i,\ i \in Z$ são mutualemente independentes e

$$(Pa)(x_i = v) = \theta^v_{a_{i-1}, a_i, a_{i+1}}.$$

Então para tudo $\mu \in M$

$$(P\mu)(x_1 = b_1, \ldots, x_n = b_n) = \sum_{a_0, \ldots, a_{n+1}} \mu(x_0 = a_0, \ldots, x_{n+1} = a_{n+1}) \prod_{i=1}^{n} \theta^{b_i}_{a_{i-1}, a_i, a_{i+1}}.$$

Dizemos que medida μ é invariante para operador P se $P\mu = \mu$.

Teorema. Todo operador P (definido acima) tem pelo menos uma medida invariante.

Começo de prova: Tomamos alguma $\mu_0 \in M$ e consideramos Cesàro médios:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P^k \mu \tag{1}$$

para tudo $n = 1, 2, \ldots$. Visto que M e um compacto, a seqüência μ_n têm pelo menos um ponto de convergência.

Lema. Cado ponto de convergência de μ_n definido para (1) é uma medida invariante de P.

Dever de casa b). Provar este lema pelo contradição.

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #3 (dado na 2^a feira, 9 março).

Para algum grafo planar conectado orientado G vamos definir um grafo dual $\overline{G}$. Sitios de $\overline{G}$ são superficies de G, i.e. essas partes do plano, aquele ela esta dividida para G. Elos de $\overline{G}$ correspondam aos elos de G um-para-um: cada elo de $\overline{G}$ cruze um elo de $\overline{G}$ e vice-versa.

Orietações de elos de G e $\overline{G}$ correspondem tambem: cada orientação de um elo de G corresponde a esse orientação de correspondante elo de $\overline{G}$ que vai da direita a esquerda através dele. Também definimos que cada direção de cada elo de $\overline{G}$ esta aberta si a correspondente direção de correspondente elo de G esta fechado.

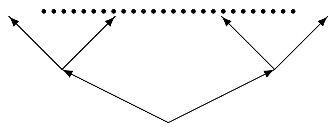
Dever de casa a). Provar que G tem um caminho aberto do sitio A ao sitio B se $\overline{G}$ não tem ciclo orientado que separa A de B e tem A a esquerda e B a direita.

Dica: Use indução pelo número dos elos em G.

Dever de casa b). Lembra percolação orientada sobre uma rede infinita (dever de casa #1). Provar que quando $\varepsilon \to 1$, a probabilidade de haver percolação tende $\to 1$ tambem.

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #4 (dado na 4^a feira, 11 março).



Este diagrama representa a rede infinita onde cada elo está aberto com a probabilidade ε independentemente do outros. Denotamos W o conjunto de sitios molhados, $|W|$ a cardinalidade de W e $P_n = \text{Prob}(|W| = n)$. Por exemplo

$$P_0 = 1 - \varepsilon, \quad P_1 = \varepsilon(1-\varepsilon)^2, \quad P_2 = 2\varepsilon^2(1-\varepsilon)^3, \quad P_3 = 5\varepsilon^3(1-\varepsilon)^4, \dots$$

Usamos a função geradora

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n,$$

Comprovo que:

$$\text{Prob}(|W| = \infty) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varepsilon \le 1/2, \\ 2 - 1/\varepsilon & \text{se } \varepsilon > 1/2, \end{cases}$$

$$\phi = (1-\varepsilon) + x\varepsilon\phi^2, \quad \text{dai} \quad \phi = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x\varepsilon(1-\varepsilon)}}{2x\varepsilon},$$

$$\text{Prob}(|W| < \infty) = \phi(1) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varepsilon \le 1/2, \\ (1-\varepsilon)/\varepsilon & \text{se } \varepsilon > 1/2. \end{cases}$$

$$\text{Para tudo} \quad k \ge 1: \qquad P_k = 2(1-\varepsilon)\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}(4\varepsilon(1-\varepsilon))^k$$

$$\left(\text{porque} \quad \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n \right).$$

$$\text{Note que} \quad k!! \asymp (k/e)^{k/2}\sqrt{\pi k}, \quad \text{dai} \quad \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} \asymp \frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

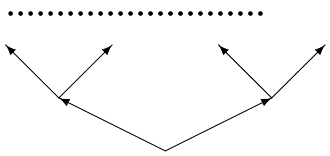
$$\phi' = \frac{1 - 2x\varepsilon(1-\varepsilon) - \sqrt{1 - 4x\varepsilon(1-\varepsilon)}}{2x^2\varepsilon\sqrt{1-4x\varepsilon(1-\varepsilon)}},$$

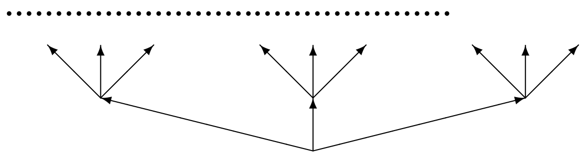
$$E(|W| \text{ dado } |W| < \infty) = \phi'(1) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon} & \text{se } \varepsilon < 1/2, \\ \infty & \text{se } \varepsilon = 1/2, \\ \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon-1} & \text{se } \varepsilon > 1/2. \end{cases}$$

Dever de casa: provar estas formulas.

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #5 (dado na 2^a feira, 16 março).





Estes diagramas representam redes infinitas onde cada elo está aberto com a probabilidade ε independentemente do outros. Seja r denote ramificação. A esquerda $r = 2$, a direita $r = 3$. Denotamos W o conjunto de sitios molhados, $|W|$ o cardinalidade de W.

Teorema.

$$\text{Prob}(|W| = \infty) \begin{cases} = 0 & \text{se } \varepsilon \le 1/r, \\ > 0 & \text{se } \varepsilon > 1/r. \end{cases}$$

Prova use seguinte:
Sejam q_∞ a probabilidade de não percolação em rede infinita e q_n a probabilidade de não percolação em rede finita com altura n. Por exemplo (para tudo r):

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1 - \varepsilon, \quad q_2 = (1 - \varepsilon) + \varepsilon(1 - \varepsilon)^r, \quad \ldots$$

Note-se que $q_\infty = \lim_{n \to \infty} q_n$. Entâo é suffisiente de achar este limito em função de ε. Geralemente para tudo $n \ge 0$:

$$q_{n+1} = (1 - \varepsilon) + \varepsilon q_n^r.$$

Representamos esta formula iterativa com a diagrama de funções $y = (1 - \varepsilon) + \varepsilon x^r$ e $y = x$ para $0 \le x,\ y \le 1$.

Dever de casa: Complete a prova de teorema.

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #6 (dado na 4^a feira, 18 março).

Seja $S = \{0,1\}^Z$ o conjunto de configurações. Denotamos $M = M(S)$ o conjunto de medidas de probabilidade sobre S, i.e. sobre σ-algebra gerada pelo cilindros. Dadas probabilidades de transição $\theta^z_{x,y}$ para $x, y, z \in \{0,1\}$, onde $\theta^0_{x,y} + \theta^1_{x,y} \equiv 1$, tem um operador $P : M \to M$ definido assim: Para alguma configuração $a \in S$ definimos Pa como uma medida, cujas componentes $x_i,\ i \in Z$ são mutualemente independente e

$$(Pa)(x_i = z) = \theta^z_{a_i,a_{i+1}}.$$

Então para tudo $\mu \in M$

$$(P\mu)(x_1 = b_1, \ldots, x_n = b_n) = \sum_{a_1,\ldots,a_{n+1}} \mu(x_1 = a_1, \ldots, x_{n+1} = a_{n+1}) \prod_{i=1}^{n} \theta^{b_i}_{a_i,a_{i+1}}.$$

Dizemos que medida μ é invariante para operador P se $P\mu = \mu$.

Consideramos o caso quando $\theta^1_{1,1} = 1, \quad \theta^1_{0,0} = \theta^1_{0,1} = \theta^1_{1,0} = \theta$.

Denotamos δ_0 e δ_1 as medidas concentradas em configurações "tudo zeros" e "tudo ums" respectivo. Note-se que δ_1 é invariante pelo P para tudo θ.

Dever de casa. Seja $\theta > 1/2$.
Provar que δ_1 é a única medida invariante para P.

Dica: Supondo que $\theta > 1/2$, prove que $P_t\, \delta_0 \to \delta_1$ quando $t \to \infty$ usando percolação de sitios.

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1^o semestre de 1998

Dever de casa #7 (dado na 2^a feira, 23 março).

Seja Z_m o anel modulo m e $S = \{0,1\}^{Z_m}$ o conjunto de configurações. Denotamos $M = M(S)$ o conjunto de medidas de probabilidade sobre S. Dadas probabilidades de transição $\theta^z_{x,y}$ para $x,y,z \in \{0,1\}$, onde $\theta^0_{x,y} + \theta^1_{x,y} \equiv 1$, tem um operador $P : M \to M$ definido assim: Para alguma configuração $a \in S$ definimos Pa como uma medida, cujas componentes $x_i,\ i \in Z$ são mutualemente independetente e

$$(Pa)(x_i = z) = \theta^z_{a_i,a_{i+1}}.$$

Pois S é finito, de fato temos uma finita cadeia de Markov. Para todos $a,b \in S$ a probabilidade de transição $a \to b$ esta

$$\prod_{i=1}^{m} \theta^{b_i}_{a_i,a_{i+1}}$$

(onde $m+1=1$). Consideramos o caso quando $\theta^1_{1,1} = 1, \quad \theta^1_{0,0} = \theta^1_{0,1} = \theta^1_{1,0} = \theta > 0$. (Está o versão finito de dever de casa #6.) Enquanto $\theta > 0$, esta cadeira de Markov é ergodica, i.e. δ_1 é a única medida invariante e $P^t\mu \to \delta_1$ para tudo μ.

Porém, neste caso ainda existe uma diferença entre pequenos e grandes valores de θ. Começamos de δ_0 e denotamos T o primeiro t quando a cadeira alcance o estado "tudo ums". A esperança $E(T)$ comporta-se differentemente como função de m para pequenos e grandes valores de θ.

Teorema.
a) Se $\theta > 1/2$, então $E(T) \asymp \ln m$.
b) Se θ está suficiente pequeno, $\ln E(T) \asymp m$.

Dever de casa. Provar este teorema.

Curso “Sistemas Markovianos de Particulas”
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #8 (dado na 4^a feira, 25 março).

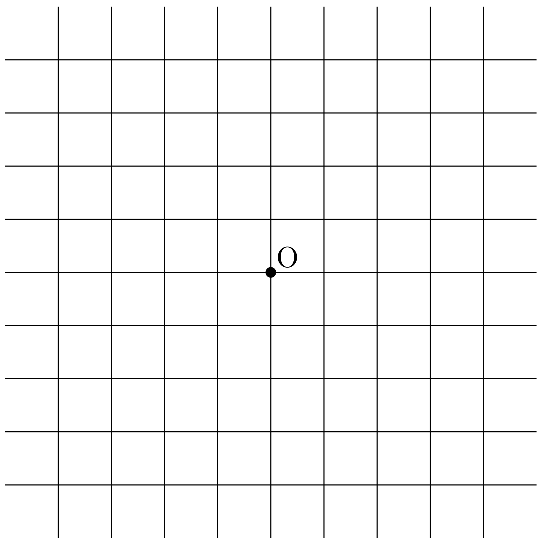
Temos m independente variáveis aleatórias $x_1, \ldots, x_m$ com estados possivel $0, 1$. Inicialemente $x_1 = \cdots = x_m = 0$. Em cado $t = 1, 2, 3, \ldots$ cada variável torna-se 1 com a probabilidade $\theta = 1/2$ independemente dos outros. Se uma variável está 1, ela fica 1 para sempre. Chamamos T o primeiro tempo quando tudo variáveis sono ums.

Dever de casa: provar que $E(T) \asymp \ln m$ quando $m \to \infty$ onde $E(\cdot)$ denote a esperança.

Curso “Sistemas Markovianos de Particulas”
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #9 (dado na 2^a feira, 13 abril).

Consideramos percolação não orientada sobre uma rede infinita
(olhe a diagrama).



Cada elo está aberto em ambos direções com a probabilidade ε independentemente de todos otros. O sítio $O = (0, 0)$ é a única fonte do liquido. Chamamos um sítio (x, y) *molhado* se tem um caminho aberto de $(0, 0)$ a (x, y). Dizemos que percolação a infinito ocorra se o conjunto do sítios molhados é infinito.

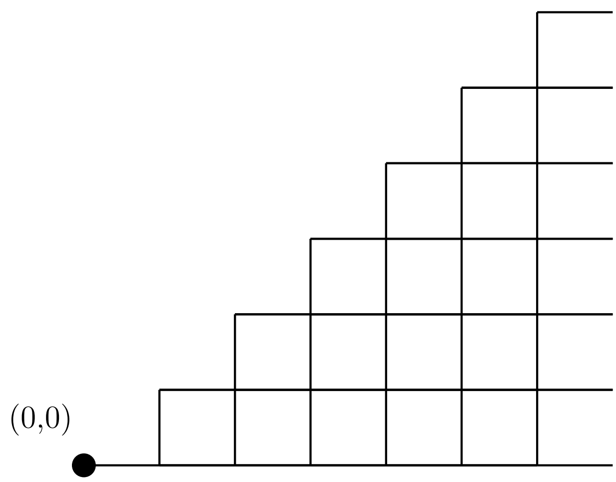
Dever de casa: Provar que se ε está suficiente grande,

$$\text{Prob(percolação a infinito)} > 0.$$

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #10 (dado na 5^a feira, 15 abril)

Consideramos percolação não orientada sobre uma rede infinita (olhe a diagrama).



Cada elo está aberto com a probabilidade ε independentemente dos otros.

O sítio $(0,0)$ é a unica fonte do liquido. Chamamos um sítio (x,y) *molhado* se tem um caminho aberto do $(0,0)$ a (x,y). Dizemos que percolação a infinito ocorre se o conjunto do sítios molhados está infinito.

Chamemos ε^* o valor para que:
Se $\varepsilon < \varepsilon^*$, Prob(percolação a infinito)$= 0$.
Se $\varepsilon > \varepsilon^*$, Prob(percolação a infinito)> 0.

Dever de casa: Provar que $0 < \varepsilon^* < 1$.

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #11 (dado na 4^a feira, 22 abril).

Seja $S = \{0, \ldots, n\}^Z$ o conjunto de configurações. Denotamos $M = M(S)$ o conjunto de medidas de probabilidade sobre S, i.e. sobre σ-algebra gerada por cilindros.

Dados $a, b \in S$, disemos que $a \prec b$ se $a_i \leq b_i$ para tudo $i \in Z$. Chamemos uma função $f : S \to R$ *monotona* se $a \prec b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$. Dado $\mu, \nu \in M$, disemos que $\mu \prec \nu$ se $E(f, \mu) \leq E(f, \nu)$ para tudo monotona f, onde E é esperança (i.e. medio). Chamamos um conjunto $A \subset S$ *superior* se $(x \in A, \quad x \prec y) \Rightarrow y \in A$.

Exemplo: Dadas duas medidas normalizadas $\mu, \ \nu$ sobre $\{0, \ldots, n\}$, $\mu \prec \nu$ se e somente se $\sum_{i=k}^{n} \mu(i) \leq \sum_{i=k}^{n} \nu(i)$ para tudo k.

Dever de casa: Dadas $\mu, \nu \in M$. Provar que $\mu \prec \nu$ se e somente se $\mu(A) \leq \nu(A)$ para todo A superior.

Dica: Provar que toda função monotona, todos valores daquela são não-negativos, representa-se com uma soma de funções caracteristicas de conjuntos superiores com coeficientes não-negativos.

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #12 (dado na 2^a feira, 27 abril).

Seja $S = \{0, \ldots, x\} \times \{0, \ldots, y\}$ o conjunto de configurações. Denotamos $M = M(S)$ o conjunto de medidas de probabilidade sobre S. Relações para medidas são definidas em Dever de casa #11.

Chamamos uma medida $\mu \in M$ *medida de produto* se todas componentas estão mutualemente independente. Em outras palavras, uma medida de produto sobre S pode ser representada como

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2,$$

onde μ_1 está uma medida normalizada sobre $\{0, \ldots, x\}$ e μ_2 está uma medida normalizada sobre $\{0, \ldots, y\}$.

Dever de casa. Provar: Dadas duas medidas de produto

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2 \quad \text{e} \quad \nu = \nu_1 \times \nu_2.$$

Então $\mu \prec \nu$ se, e somente se, $\mu_1 \prec \nu_1$ e $\mu_2 \prec \nu_2$.

Curso “Sistemas Markovianos de Particulas”
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #13 (dado na 4^a feira, 29 abril).

Consideramos o conjunto de medidas de probabilidade sobre $S = \{1, \ldots, x\}$.
A relação $\prec$ entre medidas são definida em Dever de casa #11.

Definiremos uma operação chamada *mudança* qual transforme uma medida μ em uma outra medida ν: escolhemos $i, j \in S$ onde $i < j$ e $\mu(i) > 0$, escolhemos um número positivo $d \leq \mu(i)$ e definimos ν assim:

$$\nu(k) = \begin{cases} \mu(k) - d & \text{se } k = i, \\ \mu(k) + d & \text{se } k = j, \\ \mu(k) & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

Dever de casa. Provar: Dadas duas medidas de probabilidade $\mu \prec \nu$ sobre S. Provar que é possível transformar μ em ν com várias mudanças.

Dever de casa #14 (dado na 2^a feira, 4 maio).

Dado um conjunto finito S, consideramos uma relação $\prec$ tais que:
1) $\forall\ x\ :\ x \prec x$,
2) $x \prec y\ \&\ y \prec z\ \Rightarrow\ x \prec z$.
3) $x \prec y\ \&\ y \prec x\ \Rightarrow\ x = y$.

Consideramos o conjunto de medidas de probabilidade sobre S.

Uma função f sobre S é chamada *monotona* se $x \prec y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Um conjunto $A \subseteq S$ é chamado *superior* se $x \in A\ \&\ x \prec y\ \Rightarrow\ y \in A$. Duas definições equivalentes:
a) $\mu \prec \nu$ se $E(f,\mu) \leq E(f,\nu)$ para tudo monotona f.
b) $\mu \prec \nu$ se $\mu(A) \leq \nu(A)$ para tudo superior A.

Definiremos uma operação chamada *mudança* que transforme uma medida μ em uma outra medida ν: escolhamos $i, j \in S$ onde $i \prec j$ e $\mu(i) > 0$, escolhamos um numero positivo $d \leq \mu(i)$ e definimos ν com seguinte:

$$\nu(k) = \begin{cases} \mu(k) - d & \text{se } k = i, \\ \mu(k) + d & \text{se } k = j, \\ \mu(k) & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

Dever de casa. Prove: Dados dois medidas de probabilidade $\mu \prec \nu$ sobre S. Prove que está possível transformar μ em ν com várias mudanças.

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #15 (dado na 2^a feira, 11 maio).

Denotamos $Z_m = \{0, \ldots, m-1\}$ o anel dos residuos modulo m. Seja $S = \{0,1\}^{Z_m}$ o conjunto de configurações. Dado $a, b \in S$ onde $a = (a_0, \ldots, a_{m-1})$ e $b = (b_0, \ldots, b_{m-1})$ disemos que $a \prec b$ se $a_i \leq b_i$ para tudo $i \in Z_m$. Denotamos $M = M(S)$ o conjunto de medidas de probabilidade sobre S. Definimos a relação $\prec$ sobre M como antes.

Dados $P, Q : M \to M$ disemos que $P \prec Q$ se $P\mu \prec Q\mu$ para todo $\mu \in M$. Chamamos un operador $P : M \to M$ *monotono* se $\mu \prec \nu \Rightarrow P\mu \prec P\nu$. Então:
a) Se P, Q são monotonos, então PQ é monotono também.
b) Se P, Q, R são monotonos e $P \prec Q$, então $PR \prec QR$ e $RP \prec RQ$.
c) Se P, Q estão monotones e $P \prec Q$, então $P^n \prec Q^n$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Dadas probabilidades de transição $\theta^v_{x,y,z}$ para $x, y, z, v \in \{0,1\}$, onde $\theta^0_{x,y,z} + \theta^1_{x,y,z} \equiv 1$, tem um operador $P : M \to M$ definido assim: Para toda configuração $a \in S$ definimos Pa como uma medida, cujas componentes x_i, $i \in Z_m$ são mutualemente independentes e

$$(Pa)(x_i = v) = \theta^v_{a_{i-1}, a_i, a_{i+1}}$$

onde $i-1$ e $i+1$ são modulo m. Então para tudo $\mu \in M$

$$(P\mu)(x_0 = b_0, \ldots, x_{m-1} = b_{m-1}) = \sum_{a_0, \ldots, a_{m-1}} \mu(x_0 = a_0, \ldots, x_{m-1} = a_{m-1}) \prod_{i=0}^{m-1} \theta^{b_i}_{a_{i-1}, a_i, a_{i+1}}.$$

Dever de casa: Provar que P definido assim está monotono se, e somente se,

$$\forall\, x, y, z, u, v, w \ : \ (x \leq u \ \& \ y \leq v \ \& \ z \leq w) \Rightarrow \theta^1_{x,y,z} \leq \theta^1_{u,v,w}.$$

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #16 (dado na 4^a feira, 13 maio).

Seja $S = \{0, 1\}^Z$ o conjunto de configurações. Denotamos $M = M(S)$ o conjunto de medidas de probabilidade sobre S.

Dadas probabilidades de transição $\theta^v_{x,y,z}$ para $x, y, z, v \in \{0, 1\}$, onde

$$\theta^1_{x,y,z} = \begin{cases} 1-\varepsilon & \text{se } x+y+z \geq 2, \\ \varepsilon & \text{se } x+y+z \leq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \theta^0_{x,y,z} \equiv 1 - \theta^1_{x,y,z},$$

temos um operador $P : M \to M$ definido assim: Para qualquer configuração $a \in S$ definimos Pa com uma medida, cujas componentes $x_i,\ i \in Z$ são mutualemente independentes e

$$(Pa)(x_i = v) = \theta^v_{a_{i-1},a_i,a_{i+1}}.$$

Então para tudo $\mu \in M$

$$(P\mu)(x_1 = b_1, \ldots, x_m = b_m) = \sum_{a_0,\ldots,a_{m-1}} \mu(x_0 = a_0, \ldots, x_{m-1} = a_{m-1}) \prod_{i=1}^{m} \theta^{b_i}_{a_{i-1},a_i,a_{i+1}}.$$

Denotamos δ_0 e δ_1 as medidas concentradas nas configurações "todos zeros" e "todos ums". Suponhamos que $\varepsilon \leq 1/2$.

Dever de casa: Provar que
1) P está monotono.
2) $\lim_{t\to\infty} P^t\delta_0$ e $\lim_{t\to\infty} P^t\delta_0$ existem. Denotamos estes limitos $\mu_{\min}$ e $\mu_{\max}$.
3) Se $\mu_{\min} = \mu_{\max},\ P$ está ergodico, i.e. P tem so uma medida invarianta μ_{inv} e

$$\forall\ \mu\ :\ \lim_{t\to\infty} P^t\mu = \mu_{inv}.$$

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #17 (dado na 2^a feira, 18 maio).

Seja $S = \{0,1\}^Z$ o conjunto de configurações. Denotamos $M = M(S)$ o conjunto de medidas de probabilidade sobre S (i.e. sobre σ-álgebra gerada por cilíndros.)

Dever de casa: Dada uma seqüência $\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2, \ldots \in M(S)$.
Provar que se o limite

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(C)$$

existe para todos superiores e inferiores cilíndros C, então este limite existe para todos cilíndros C.

Curso “Sistemas Markovianos de Particulas”
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #18 (dado na 4^a feira, 20 maio).

Isto é mesmo que dever de casa #17 com só uma mudança: o conjunto de configurações é $S = \{0, 1, 2\}^Z$ em vez de $\{0, 1\}^Z$.

Denotamos $M = M(S)$ o conjunto de medidas de probabilidade sobre S (i.e. sobre σ-álgebra generada por cilíndros.)

Naturalemente $0 < 1 < 2$ e para tudo $a = (a_i,\ i \in Z)$ e $b = (b_i,\ i \in Z)$

$$a \prec b \Longleftrightarrow (a_i \leq b_i \text{ para todos } i \in Z).$$

Todos os otros definições são como antes.

Dever de casa: Dada uma seqüência $\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2, \ldots \in M(S)$.
Provar que se o limite

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(C)$$

existe para todos superiores e inferiores cilíndros C, este limite existe para todos cilíndros C.

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #19 (dado na 2^a feira, 25 maio).

Seja $S = \{0, \ldots, n\}^Z$ o conjunto de configurações. Denotamos $M = M(S)$ o conjunto de medidas de probabilidade sobre S. Dadas probabilidades de transição $\theta^v_{x,y,z}$ para $x, y, z, v \in \{0, \ldots, n\}$, onde $\sum_v \theta^v_{x,y,z} \equiv 1$, temos operador $P : M \to M$ definido assim: Para qualquer configuração $a \in S$ definimos Pa como uma medida, cujas componentes $x_i,\ i \in Z$ são mutualemente independentes e

$$(Pa)(x_i = v) = \theta^v_{a_{i-1}, a_i, a_{i+1}}.$$

Então para todo $\mu \in M$

$$(P\mu)(x_1 = b_1, \ldots, x_n = b_n) = \sum_{a_0, \ldots, a_{n+1}} \mu(x_0 = a_0, \ldots, x_{n+1} = a_{n+1}) \prod_{i=1}^{n} \theta^{b_i}_{a_{i-1}, a_i, a_{i+1}}.$$

Dizemos que operador P é ergodico se ele tem só uma medida invariante.

Teorema. Consideramos todos operadores $P : M \to M$ definidos acima com probabilidades de transição iguais somente $0,\ 1/2,\ 1$. Não existe algoritmo classificando todos estes operadores em ergodicos vs. não ergodicos.

Dever de casa: Escrever um resumo de capitulo 14 de [1].

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1^o semestre de 1998

Dever de casa #20 (dado na 2^a feira, 1 junho).

Consideranos mesmo operador que no dever de casa #16, mas agora denotamos ele $V : M \to M$ onde $M = M(S)$, $S = \{0,1\}^Z$. Lembramos que as probabilidades de transição são $\theta^v_{x,y,z}$ para $x, y, z, v \in \{0,1\}$, onde

$$\theta^1_{x,y,z} = \begin{cases} 1-\varepsilon & \text{se } x+y+z \geq 2, \\ \varepsilon & \text{se } x+y+z \leq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \theta^0_{x,y,z} \equiv 1 - \theta^1_{x,y,z}.$$

Suponhamos que $\varepsilon \leq 1/2$, então V está monotono.

Denotamos $Z_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Denotamos ρ a medida de produto sobre S^{Z_+} onde cada componenta $r_{s,t}$ está distrubuida uniformamente sobre $[0,1]$ independemente dos outros.

Consideramos o acoplamento de V com V mesmo, definido com uma medida sobre $S^{Z_+} \times S^{Z_+}$ induzida para ρ com a mapa seguinta:

$$x_{s,0} = 0 \quad \text{e} \quad y_{s,0} = 1 \quad \text{para tudo} \quad s \in Z,$$

$$x_{s,t} = \begin{cases} 0 & \text{se } r_{s,t} \leq \varepsilon, \\ \text{Voting}(x_{s-1,t-1}, x_{s,t-1}, x_{s+1,t-1}) & \text{se } \varepsilon < r_{s,t} < 1-\varepsilon, \\ 1 & \text{se } r_{s,t} \geq 1-\varepsilon, \end{cases}$$

$$y_{s,t} = \begin{cases} 0 & \text{se } r_{s,t} \leq \varepsilon, \\ \text{Voting}(y_{s-1,t-1}, y_{s,t-1}, y_{s+1,t-1}) & \text{se } \varepsilon < r_{s,t} < 1-\varepsilon, \\ 1 & \text{se } r_{s,t} \geq 1-\varepsilon \end{cases}$$

para todos $s \in Z$ e $t > 0$, onde

$$\text{Voting}(a,b,c) = \begin{cases} 1 & \text{se } a+b+c \geq 2, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Note-se que para todos t:
$x_{s,t}$ são distrubuidos com $V^t \delta_0$,

$y_{s,t}$ são distrubuidos com $V^t\delta_1$,
onde δ_0 e δ_1 são medidas concentradas em configuracões “tudo zeros” e “tudo ums”.

Note-se tambem que $x_{s,t} \leq y_{s,t}$ com a probabilidade 1.
Chamamos (s,t) a ponta de diferencia se $x_{s,t} < y_{s,t}$.

Dever de casa: Prove que o operador V é ergodico se e somente se os pontos de diferencia extinguem-se, i.e.

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Prob}(x_s^t < y_s^t) = 0.$$

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1^o semestre de 1998

Dever de casa #21 (dado na 4^a feira, 3 junho).

Consideranos mesmo operador V que no dever de casa #20. Lembramos que as probabilidades de transição são $\theta^v_{x,y,z}$ para $x, y, z, v \in \{0, 1\}$, onde

$$\theta^1_{x,y,z} = \begin{cases} 1-\varepsilon & \text{se } x+y+z \geq 2, \\ \varepsilon & \text{se } x+y+z \leq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \theta^0_{x,y,z} \equiv 1 - \theta^1_{x,y,z}.$$

Suponhamos que $\varepsilon \leq 1/2$, então V está monotono e provamos que V está ergodico se $\varepsilon > 1/3$ usando o acoplamento.

Denotamos $Z_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Denotamos ρ a medida de produto sobre S^{Z_+} onde cada componenta $r_{s,t}$ está distrubuida uniformamente sobre $[0, 1]$ independemente dos outros.

Consideramos o acoplamento de V com V mesmo com um operador de percolação P, definido com uma medida sobre $S^{Z_+} \times S^{Z_+} \times S^{Z_+}$ induzida para ρ com a mapa seguinta:

$$x_{s,0} = 0 \quad \text{e} \quad y_{s,0} = 1 \quad \text{e} \quad m_{s,0} = 0 \quad \text{para tudo} \quad s \in Z,$$

$$x_{s,t} = \begin{cases} 0 & \text{se } r_{s,t} \leq \varepsilon, \\ \text{Voting}(x_{s-1,t-1}, x_{s,t-1}, x_{s+1,t-1}) & \text{se } \varepsilon < r_{s,t} < 1-\varepsilon, \\ 1 & \text{se } r_{s,t} \geq 1-\varepsilon, \end{cases}$$

$$y_{s,t} = \begin{cases} 0 & \text{se } r_{s,t} \leq \varepsilon, \\ \text{Voting}(y_{s-1,t-1}, y_{s,t-1}, y_{s+1,t-1}) & \text{se } \varepsilon < r_{s,t} < 1-\varepsilon, \\ 1 & \text{se } r_{s,t} \geq 1-\varepsilon, \end{cases}$$

$$m_{s,t} = \begin{cases} 1 & \text{se } r_{s,t} \leq \varepsilon, \\ \min(y_{s-1,t-1}, y_{s,t-1}, y_{s+1,t-1}) & \text{se } \varepsilon < r_{s,t} < 1-\varepsilon, \\ 1 & \text{se } r_{s,t} \geq 1-\varepsilon \end{cases}$$

para todos $s \in Z$ e $t > 0$, onde

$$\mathrm{Voting}(a,b,c) = \begin{cases} 1 & \text{se } a+b+c \geq 2, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Note-se que para todos t:
$x_{s,t}$ são distrubuidos com $V^t\delta_0$,
$y_{s,t}$ são distrubuidos com $V^t\delta_1$,
$m_{s,t}$ são distrubuidos com $P^t\delta_0$,
onde δ_0 e δ_1 são medidas concentradas em configuracões "tudo zeros" e "tudo ums". Aqui P e um operador de percolação, similar o operador de dever de casa #6, so com 3 (em vez de 2) visinhos.

Note-se também que $x_{s,t} \leq y_{s,t}$ com a probabilidade 1.
Chamamos (s,t) a ponta de diferencia se $x_{s,t} < y_{s,t}$.

Dever de casa: Prove que se $1/3 < \varepsilon \leq 1/2$,
a) O operador P está ergodico.
b) Os pontos de diferencia extinguem-se, i.e.

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Prob}(x_s^t < y_s^t) = 0,$$

então V está ergodico também.

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1^o semestre de 1998

Dever de casa #22 (dado na 2^a feira, 8 junho).

Isto e uma generalização de dever de casa #21. Consideramos um operador com na dever de casa #2, mas chamamos ele Q agora. Lembramos que as probabilidades de transição são $\theta^v_{x,y,z}$ para $x, y, z, v \in \{0, 1\}$.

Teorema. Se

$$\max_{x,y,z} \theta^1_{x,y,z} - \min_{x,y,z} \theta^1_{x,y,z} < 1/3$$

então Q está ergodico.

A ideia de prova. Denotamos

$$\varepsilon = \min_{x,y,z} \theta^1_{x,y,z}, \quad \delta = 1 - \max_{x,y,z} \theta^1_{x,y,z}.$$

Denotamos π e ρ duas medidas de produto sobre S^{Z_+} onde cada componenta $p_{s,t}$ e $r_{s,t}$ está distrubuida uniformamente sobre $[0, 1]$ independemente dos outros.

Denotamos $Z_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Consideramos o acoplamento de Q com Q mesmo com um operador de percolação P, definido com uma medida sobre $S^{Z_+} \times S^{Z_+} \times S^{Z_+}$ induzida para ρ, μ e ν, onde $x_{s,0}$ e $y_{s,0}$ são distrubuido seguinte qualquer medidas μ e ν e $m_{s,0} \equiv 0$ para tudo $s \in Z$, com a mapa seguinta. Para tudo $t > 0$:

$$x_{s,t} = \begin{cases} 1 & & \text{se } r_{s,t} \le \varepsilon, \\ 1 \quad \text{se} \quad p_{s,t} < \phi(x_{s-1,t-1}, x_{s,t-1}, x_{s+1,t-1}) \quad \text{e} \quad 0 \quad \text{c.c.} & & \text{se } \varepsilon < r_{s,t} < 1 - \delta, \\ 0 & & \text{se } r_{s,t} \ge 1 - \delta, \end{cases}$$

$$y_{s,t} = \begin{cases} 1 & & \text{se } r_{s,t} \le \varepsilon, \\ 1 \quad \text{se} \quad p_{s,t} < \phi(x_{s-1,t-1}, x_{s,t-1}, x_{s+1,t-1}) \quad \text{e} \quad 0 \quad \text{c.c.} & & \text{se } \varepsilon < r_{s,t} < 1 - \delta, \\ 0 & & \text{se } r_{s,t} \ge 1 - \delta, \end{cases}$$

$$m_{s,t} = \begin{cases} 1 & \text{se } r_{s,t} \le \varepsilon, \\ \min(m_{s-1,t-1}, m_{s,t-1}, m_{s+1,t-1}) & \text{se } \varepsilon < r_{s,t} < 1 - \delta, \\ 1 & \text{se } r_{s,t} \ge 1 - \delta \end{cases}$$

para todos $s \in Z$ e $t > 0$, onde

$$\phi(x, y, z) = (\theta^1_{x,y,z} - \varepsilon)/(1 - \varepsilon - \delta).$$

Chamamos (s, t) o ponto de diferencia se $x_{s,t} \neq y_{s,t}$.

Note-se que para todos t:
a) $x_{s,t}$ são distrubuidos com $Q^t\mu$,
b) $y_{s,t}$ são distrubuidos com $Q^t\nu$,
c) $m_{s,t}$ são distrubuidos com $P^t\delta_0$, onde P está um operador de percolação, similar o operador de dever de casa #6, so com 3 (em vez de 2) visinhos e δ_0 está a medida concentrada na configuracão "tudo zeros".
d) $(x_{s,t} \neq y_{s,t}) \Longrightarrow m_{s,t} = 0$.

Dever de casa: Prove que se

$$\max_{x,y,z} \theta^1_{x,y,z} - \min_{x,y,z} \theta^1_{x,y,z} < 1/3$$

d) O operador P está ergodico.
e) Os pontos de diferencia extinguem-se, i.e.

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Prob}(x^t_s \neq y^t_s) = 0.$$

f) Q está ergodico também.

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1^o semestre de 1998

Dever de casa #23 (dado na 4^a feira, 10 junho).

Isto é uma generalização de dever de casa #22. Agora $S = \{0,1,2\}^Z$ e as probabilidades de transição são $\theta^v_{x,y,z}$ onde $x,y,z,v \in \{0,1,2\}$. Naturalemente $\theta^v_{x,y,z} \geq 0$ e $\sum_v \theta^v_{x,y,z} \equiv 1$.

Teorema. Se

$$\min_{x,y,z} \theta^0_{x,y,z} + \min_{x,y,z} \theta^1_{x,y,z} + \min_{x,y,z} \theta^2_{x,y,z} > 2/3, \tag{2}$$

então Q está ergodico.

A idéia de prova. Denotamos

$$\varepsilon_v = \min_{x,y,z} \theta^v_{x,y,z} \quad \text{para} \quad v = 0,1,2.$$

Denotamos T o conjunto de medidas normaligadas sobre $\{0,1,2\}$. Podem interpretar as probabilidades de transição $\theta^v_{x,y,z}$ como uma mapa $\theta : \{0,1,2\}^3 \to T$. Denotamos $\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2 \in T$ as medidas concentradas no 0, 1, 2 respectivamente.

Lema. Está possivel representar

$$\theta = \varepsilon_0\delta_0 + \varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 + (1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\phi$$

onde $\phi \in T$ também.

Denotamos ρ a medida de produto sobre S^{Z_+} onde cada componenta $r_{s,t}$ está distrubuida uniformamente sobre $[0,1]$ independemente dos outros. Denotamos $Z_+ = \{0,1,2,\ldots\}$. Consideramos o acoplamento de Q com Q mesmo com um operador de percolação P, definido com uma medida sobre $S^{Z_+} \times S^{Z_+} \times S^{Z_+}$ induzida para ρ, μ e ν, onde $x_{s,0}$ e $y_{s,0}$ são distrubuido seguinte qualquer medidas μ e ν e $m_{s,0} \equiv 0$ para tudo $s \in Z$, com a mapa seguinta. Para tudo $t > 0$:

$$x_{s,t} = \begin{cases} 0 & \text{se } r_{s,t} \leq \varepsilon_0, \\ 1 & \text{se } \varepsilon_0 < r_{s,t} \leq \varepsilon_0 + \varepsilon_1, \\ 2 & \text{se } \varepsilon_0 + \varepsilon_1 < r_{s,t} \leq \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \text{distribuido seguinte } \phi(x_{s-1.t-1}, x_{s,t-1}, x_{s+1,t-1}) & \text{se } \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < r_{s,t}, \end{cases}$$

$$y_{s,t} = \begin{cases} 0 & \text{se } r_{s,t} \leq \varepsilon_0, \\ 1 & \text{se } \varepsilon_0 < r_{s,t} \leq \varepsilon_0 + \varepsilon_1, \\ 2 & \text{se } \varepsilon_0 + \varepsilon_1 < r_{s,t} \leq \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \text{distribuido seguinte } \phi(y_{s-1.t-1}, y_{s,t-1}, y_{s+1,y-1}) & \text{se } \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < r_{s,t}, \end{cases}$$

$$m_{s,t} = \begin{cases} 1 & \text{se } r_{s,t} \leq \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \min(m_{s-1,t-1}, m_{s,t-1}, m_{s+1,t-1}) & \text{se } \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < r_{s,t}. \end{cases}$$

Chamamos (s, t) o ponto de diferença se $x_{s,t} \neq y_{s,t}$.

Note-se que para todos t:

a) $x_{s,t}$ são distrubuidos com $Q^t\mu$ e $y_{s,t}$ são distrubuidos com $Q^t\nu$,

b) $m_{s,t}$ são distrubuidos com $P^t\delta_0$, onde P está um operador de percolação,

c) $(x_{s,t} \neq y_{s,t}) \Longrightarrow m_{s,t} = 0$.

d) O operador P está ergodico.

e) Os pontos de diferença extinguem-se, i.e. $\lim_{t\to\infty} \text{Prob}(x_s^t \neq y_s^t) = 0$.

f) Q está ergodico também.

Dever de casa: Este texto está errado! Screvere uma correção!

P.S. Obrigado a Marina!

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1^o semestre de 1998

Dever de casa #24 (dado na 2^a feira, 15 junho).

Denotamos $S = \{0, 1\}^{Z^2}$ a espaço de configurações.
Definimos um operador $D\ :\ S \to S$ assim:

$$\forall\ s \in S,\quad (x, y) \in Z^2\ :\ (Ds)(x, y) =$$

$$\max(\min(s(x, y), s(x, y+1), \min(s(x+1, y), s(x+1, y+1))).$$

Dever de casa:

1) Provar que D é monotono.

2) Chamamos a configuração uma ilha se ela tem apenas um número finito de ums. Provar que para todo ilha s existe t tal que $D^t(s) =$ "tudo zeros".

3) Chamamos a configuração um lago se ela tem apenas um número finito de zeros. Provar que para todo lago s existe t tal que $D^t(s) =$ "tudo ums".

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1^o semestre de 1998

Dever de casa #25 (dado na 4^a feira, 17 junho).

Denotamos $S = \{0,1\}^{Z^2}$ a espaço de configurações. Consideramos o mesmo operador $D : S \to S$ que no dever de casa #24:

$$\forall\ s \in S, \quad (x,y) \in Z^2 \ : \ (Ds)(x,y) =$$

$$\max(\min(s(x,y), s(x,y+1), \min(s(x+1,y), s(x+1,y+1))).$$

Note-se que é possivel representar D com $D \ : \ M \to M$ onde $M = M(S)$ é o conjunto de medidas normalizadas sobre S.

Obtemos um outro operador $P \ : \ M \to M$ para introduzir a probabilidade no D assim: Para tudo s a medida Ps está a medida de produto com probabilidades

$$(Ps)(a(x,y)=1) = \begin{cases} \varepsilon & \text{se } (Ds)(x,y) = 0, \\ 1 & \text{se } (Ds)(x,y) = 1. \end{cases},$$

onde ε é uma constanta.

Teorema. Existe $\varepsilon^* > 0$ tal que o operador P não é ergodico para todo $\varepsilon < \varepsilon^*$.

Dever de casa: Escrever a prova deste teorema.

Dica: É bastante provar que existe uma função $\phi(\varepsilon)$ tal que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \phi(\varepsilon) = 0 \quad \text{e} \quad \forall x, y, t \ : \ (P^t \delta_0)(a(x,y)=1) \leq \phi(\varepsilon).$$

Dever de casa #D (não usado).

Denotamos $S = \{0,1\}^{Z^d}$ a espaço de configurações. Vamos definir uma classe de operadores $D : S \to S$. Escolhemos um número natural n e n vetors $v_1, \ldots, v_n \in Z^d$. Escolhemos também a função de Boole $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Depois definimos D assim:

$$\forall\ s \in Z^d \ : \ (Dx)(s) = F(x(s - v_1), \ldots, x(s - v_n)).$$

Note-se que D é monotono se e somente se F está monotona. Note-se tambem que é possivel representar tudo D como P com probabilidades de transição iguais a zeros ou ums.

Chamamos a configuração uma ilha se ela tem apenas um número finito de ums. Dizemos que D *erode* uma configuração $x \in S$ se

$$\exists\ t \ : \ D^t x = \text{“tudo zeros”}.$$

Dizemos que D é um eroder se erodes todos ilhas.

Teorema. (Não provamos aqui.) Não existe algoritmo para classificar todos operadores D em eroderes vs. não eroderes.

Porém existe um algoritmo para classificar todos **monotono** operadores D com só dois estados ou na dimensão 1 em eroders vs. não eroders. Denotamos N a conjunto de números $1, \ldots, n$. Dizemos que um sub-conjunto $K \subset N$ é um obstáculo se $F(a_1, \ldots, a_n) = 0$ onde cado a_i está zero se $i \in K$ e está um se $i \notin K$. Para cada obstáculo K consideramos $C(K) \subset R^d$ o convexo casco de vetoros v_i para tudo $i \in K$. Denotamos σ a intersecção de $C(k)$ para todos obstáculos K.

Teorema. Suponhamos que F é monótono. Entáo D é um eroder se e somente se σ é vasio.

Dever de casa: Provar este teorema em uma direção: se σ é vasio, então D é um eroder.

Dica: use Teorema de Helly.

Teorema de Helly. Dada a familia de sub-conjuntos convexos $S_i \subset R^d,\ i \in I$ de R^d. Sabemos que todos $d+1$ conjuntos dessa familia têm um ponto comum. Então todos conjuntos $S_i,\ i \in I$ têm um ponto comum.

Dever de casa: Provar o teorema de Helly no caso $d = 1$.

Dever de casa #22 (dado na 2^a feira, 8 junho).

Isto é uma generalização de dever de casa #?.

Dado um conjunto não vazio de *vetores-pais*

$$(\Delta s_1, \Delta t_1),\ \ldots,\ (\Delta s_n,\ \Delta t_n) \in Z^{d+1},$$

onde todos $\Delta s_i \in Z^d$ e todos Δt_i são inteiros e $1 \leq \Delta t_i \leq M$, onde M é chamado memoria.

Pontos $(s - \Delta s_1,\ t - \Delta t_1),\ \ldots,\ (s - \Delta s_n,\ t - \Delta t_n)$ são chamados *pais* de $(s,\ t)$.

Toda função $\phi : \{0,\ 1\}^n \to [0,\ 1]$ pode ser usada como função de transição. Dados vetores-pais and a função de transição, dizemos que temos um automato celular ou CA. Uma medida μ sobre $\{0,\ 1\}^{Z^{d+1}}$ é chamada um processo deste CA se a seguinte "especificação" é satisfeita:

Dado qualquer t_0 e componentas $a(s,\ t)$ para todos $t < t_0$, a medida em t_0 é uma medida-produto naquela todas componentes $a(s,\ t_0)$ são mutualmente independentes e $a(s,\ t_0)$ é igual a 1 com probabilidade

$$\phi(a(s - \Delta s_1,\ t_0 - \Delta t_1),\ \ldots,\ a(s - \Delta s_n,\ t_0 - \Delta t_n)).$$

Vamos usar a seguinte construção de limite: Escolhemos um tempo inicial t_0 e qualquer distribuição inicial de $a(s,\ t)$ para todos $t < t_0$ e definimos a distribuiçãoof $a(s,\ t)$ para todos $t \geq t_0$ na maneira indutiva, seguindo a nossa especificação. Todos pontos de aderência desta seq́uência de distribuições é um processo. Isto mostra que pelo menos um processo existe.

Teorema.

Denotamos $Z_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Denotamos ρ a medida de produto sobre S^{Z_+} onde cada componenta $r_{s,t}$ está distrubuida uniformamente sobre $[0, 1]$ independentemente dos outros.

Consideramos o acoplamento de Q com Q mesmo com um operador de percolação P, definido com uma medida sobre $S^{Z_+} \times S^{Z_+} \times S^{Z_+}$ induzida para ρ com a mapa seguinta:

$$x_{s,0} = 0 \quad \text{e} \quad y_{s,0} = 1 \quad \text{e} \quad m_{s,0} = 0 \quad \text{para tudo} \quad s \in Z,$$

$$x_{s,t} = \begin{cases} 0 & \text{se } r_{s,t} \le \varepsilon, \\ F(x_{s-1,t-1}, x_{s,t-1}, x_{s+1,t-1}) & \text{se } \varepsilon < r_{s,t} < 1-\varepsilon, \\ 1 & \text{se } r_{s,t} \ge 1-\varepsilon, \end{cases}$$

$$y_{s,t} = \begin{cases} 0 & \text{se } r_{s,t} \le \varepsilon, \\ F(y_{s-1,t-1}, y_{s,t-1}, y_{s+1,t-1}) & \text{se } \varepsilon < r_{s,t} < 1-\varepsilon, \\ 1 & \text{se } r_{s,t} \ge 1-\varepsilon, \end{cases}$$

$$m_{s,t} = \begin{cases} 1 & \text{se } r_{s,t} \le \varepsilon, \\ \min(y_{s-1,t-1}, y_{s,t-1}, y_{s+1,t-1}) & \text{se } \varepsilon < r_{s,t} < 1-\varepsilon, \\ 1 & \text{se } r_{s,t} \ge 1-\varepsilon \end{cases}$$

para todos $s \in Z$ e $t > 0$, onde

Note-se que para todos t:
$x_{s,t}$ são distrubuidos com $V^t\delta_0$,
$y_{s,t}$ são distrubuidos com $V^t\delta_1$,
$m_{s,t}$ são distrubuidos com $P^t\delta_0$,
onde δ_0 e δ_1 são medidas concentradas em configuracões "tudo zeros" e "tudo ums". Aqui P e um operador de percolação, similar o operador de dever de casa #6, so com 3 (em vez de 2) visinhos.

Chamamos (s,t) um ponto de diferença se $x_{s,t} < y_{s,t}$.

Dever de casa: Provar que se ?,
a) O operador P é ergodico.
b) Os pontos de diferença extinguem-se, i.e.

$$\lim_{t\to\infty} \text{Prob}(x_s^t \ne y_s^t) = 0.$$

c) O operador Q é ergodico.

Curso “Sistemas Markovianos de Particulas”
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #P (dado na ?^{a} feira, ?).

Seja $S = \{0,1\}^Z$ o conjunto de configurações. Denotamos $M = M(S)$ o conjunto de medidas de probabilidade (i.e. normalizadas) sobre S, i.e. sobre σ-algebra gerada pelo cilindros.

Dados $P, Q : M \to M$ disemos que $P \prec Q$ se $P\mu \prec Q\mu$ para todo $\mu \in M$. Chamamos un operador $P : M \to M$ *monotono* se $\mu \prec \nu \Rightarrow P\mu \prec P\nu$.

Para todos $P, Q, R : M \to M$:

a) Se P, Q são monotonos, PQ é monotono tambem.

b) Se P, Q, R são monotonos e $P \prec Q$, então $PR \prec QR$ e $RP \prec RQ$.

c) Se P, Q são monotonos e $P \prec Q$, então $P^n \prec Q^n$ para tudo $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Dadas probabilidades de transição $\theta^v_{x,y,z}$ para $x, y, z, v \in \{0,1\}$, onde $\theta^0_{x,y,z} + \theta^1_{x,y,z} \equiv 1$, temos um operador $P : M \to M$ definido assim: Para toda configuração $a \in S$ definimos Pa como uma medida, cujas componentes $x_i,\ i \in Z$ são mutualemente independentes e

$$(Pa)(x_i = v) = \theta^v_{a_{i-1},a_i,a_{i+1}}.$$

Então para todo $\mu \in M$

$$(P\mu)(x_1 = b_1, \ldots, x_n = b_n) = \sum_{a_0,\ldots,a_{n+1}} \mu(x_0 = a_0, \ldots, x_{n+1} = a_{n+1}) \prod_{i=1}^{n} \theta^{b_i}_{a_{i-1},a_i,a_{i+1}}.$$

d) Um operador P definido assim é monotono se e somente se

$$\forall\ x, y, z, a, b, c\ :\ (x \le a\ \&\ y \le b\ \&\ z \le c) \Rightarrow \theta^1_{x,y,z} \le \theta^1_{a,b,c}.$$

e) Dados operadores $P, \overline{P}$ definido assim com $\theta^v_{x,y,z}$ e $\overline{\theta}^v_{x,y,z}$. Então $P \prec \overline{P}$ se e somente se

$$\forall\ x, y, z\ :\ \theta^1_{x,y,z} \le \overline{\theta}^1_{x,y,z}.$$

Curso “Sistemas Markovianos de Particulas”
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Dever de casa #Q (dado na 4^a feira, 18 março).

Seja $S = \{0,1\}^Z$ o conjunto de configurações. Denotamos $M = M(S)$ o conjunto de medidas de probabilidade sobre S, i.e. sobre σ-algebra gerada pelo cilindros. Dadas probabilidades de transição $\theta^y_{x_1,\ldots,x_r}$ para $x_1,\ldots,x_r,y \in \{0,1\}$, onde

$$\theta^0_{x_1,\ldots,x_r} + \theta^1_{x_1,\ldots,x_r} \equiv 1,$$

tem um operador $P : M \to M$ definido assim: Para qualquer configuração $a \in S$ definimos Pa com uma medida, cujas componentes $x_i,\ i \in Z$ são mutualemente independentes e

$$(Pa)(x_i = b) = \theta^b_{a_{i+1},\ldots,a_{i+r}}.$$

Dizemos que medida μ esta invariante para operador P se $P\mu = \mu$.

Consideramos o caso quando

$$\theta^1_{x_1,\ldots,x_r} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 = \cdots = x_r = 1, \\ \theta & \text{em tudo outros casos.} \end{cases}$$

Denotamos δ_0 e δ_1 as medidas concentradas em configurações “tudo zeros” e “tudo ums” respectivo. Note-se que δ_1 está invariante pelo P para tudo θ.

Dever de casa. Prove que:
a) Está um valor critical θ^* tais que:
se $\theta > \theta^*$, então δ_1 está a unica medida invarianta pelo P.
se $\theta < \theta^*$, então está uma outra medida invarianta pelo P.
b) Está uma constanta positiva C tais que

$$1 - \frac{1}{r} \le \theta^* \le 1 - \frac{C}{r}.$$

Dica: Para tudo $r = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ definimos um operador $D_r : S \to S$ em seguinte. Para tudo $a \in S$ e tudo $i \in Z$:

$$(D_r a)_i = \min(a_{i+1},\ldots,a_{i+r}).$$

Para tudo $\theta \in [0,1]$ definimos um operador $R_\theta : M \to M$ em seguinte: $R_\theta\, a$ está uma medida daquele tudo componentas sono independente e

$$(R_\theta\, a)(x_i = b) = \begin{cases} 1 & \text{se } a_i = 1, \\ \theta & \text{se } a_i = 0\ . \end{cases}$$

Note-se que $P = R_\theta\, D_r$. Tambem para tudo $k = 1,2,3,\ldots$ definimos $Q_k : S \to S$ em seguinte:

$$(Q_k a)_i = \min\{a_j | ki \le j < k(i+1)\}.$$

Prove que

$$Q_k R_\theta D_{3k} \prec R_{\theta^k} D_2 Q_k.$$

Então prove que

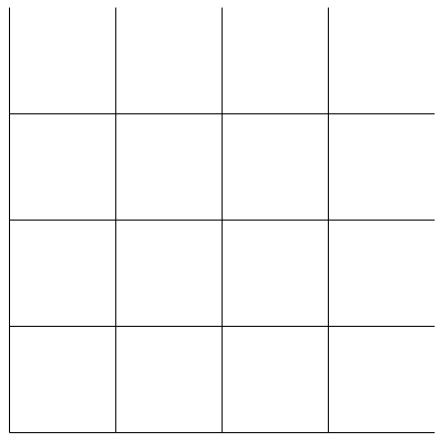
$$Q_k (R_\theta D_{3k})^t \prec (R^t_{\theta^k} D_2) Q_k$$

para induction sobre t.

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Teste #1 (dado na 4^a feira, 1 abril)

Problema 1. Consideramos percolação não orientada sobre uma rede infinita (olhe a diagrama).



(0,0)

Cado elo está aberto em ambos direções com a probabilidade ε e está fechado em ambos direções com a probabilidade $1-\varepsilon$. Cado elo est aberto/fechado independente dos otros. O sítio $(0,0)$ está a unico fonte do liquido. Chamamos um sítio (m,n) molhado se tem um caminho aberto do $(0,0)$ a (m,n). Dizemos que percolação a infinito ocorra se a conjunto do sítios molhados está infinito.

1a) Prove que ter $\varepsilon_0 > 0$ tais que para tudo $\varepsilon < \varepsilon_0$ probabilidade da percolação a infinito é zero.

1b) Prove que ter $\varepsilon_1 < 1$ tais que para tudo $\varepsilon > \varepsilon_1$ probabilidade da percolação a infinito é positivo.

Problema 2. Ter $2m$ independente variáveis aleatórias $x_1, \ldots, x_{2m}$ com estados possivel $0, 1$. Inicialemente $x_1 = \cdots = x_{2m} = 0$. Em cado $t = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ cada variável torna-se 1 com a probabilidade $1/2$ e torna-se 0 com a probabilidade $1/2$ independemente dos outros. Chamamos T o primeiro tempo quando a metade de variáveis sono ums e a metade de variáveis sono zeros.

Denotamos $E(T)$ a esperança de T. Descobrir a assintôtica de $E(T)$ quando $m \to \infty$, i.e. a função $F(m)$ tais que $E(T) \asymp F(m)$.

Curso “Sistemas Markovianos de Particulas”
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Teste #2.

Nas problemas 1,2,3 consideramos uma relação $\prec$ sobre S tais que:
1) $\forall\, x \ : \ x \prec x$, 2) $(x \prec y \ \&\ y \prec z) \ \Rightarrow\ x \prec z$.
Não suponhamos que $(x \prec y \ \&\ y \prec x) \ \Rightarrow\ x = y$.

Problema 1.
Dado um conjunto $S = \{1, \ldots, N\}$ onde $x \prec y$ para tudo $x, y \in S$.
a) Quando conjuntos superiores $A \subseteq S$ há ?
b) Prove que $\mu \prec \nu$ para todas medidas normaligadas μ, ν sobre S.

Problema 2.
Dado um conjunto $S = \{1, \ldots, N\}$ onde $x \prec y$ somente se $x = y$.
a) Quando conjuntos superiores $A \subseteq S$ há ?
b) Dado medidas normaligadas μ, ν sobre S. Seja $\mu \prec \nu$. Prove que $\mu = \nu$.

Problema 3.
Dado um conjunto $S = \{1, \ldots, N\}^2 = \{(x, y) \ : \ x, y = 1, \ldots, N\}$
onde $(x, y) \prec (a, b)$ se e somente se $x + y \leq a + b$.
Quando conjuntos superiores $A \subseteq S$ há ?

Problema 4.
Um dado está um cubo perfeito com superfícies enumerados 1,2,3,4,5,6. No cado ensaio $6N$ dados estão jogandos. Chamamos um ensaio sucesso se cado número 1,2,3,4,5,6 está presente N vezes lá. Ensaios repetem até sucesso. Denotamos T o número de ensaios e $E(T)$ a esperança de T. Presentar a função $F(N)$ tais que $E(T) = F(N) \cdot (1 + o(1))$ onde $o(1) \to 0$ quando $N \to \infty$.
Dica: $N! = (N/e)^N \sqrt{2\pi N} \cdot (1 + o(1))$.

Problema 5.
Consideramos percolação não orientada sobre uma rede infinita com Z o conjunto de sítios. Sitios i e j estão conectados com um elo se $1 \leq |i - j| \leq 2$. Cado elo está aberto com a probabilidade ε independente dos otros elos. O sítio 0 está a unico fonte do liquido. Provar que a probabilidade da percolação a infinito é zero para todo $\varepsilon < 1$.

Curso "Sistemas Markovianos de Particulas"
André Toom
IME/USP, 1o semestre de 1998

Teste #3.

Seja $S = \{0,1\}^Z$ o conjunto de configurações. Denotamos $M = M(S)$ o conjunto de medidas normaligadas sobre S. Denotamos δ_0 a medida concentrada na configuração "tudo zeros". Dado seguintes probabilidades de transição $\theta^w_{a,b,c,d,e}$ para $a, b, c, d, e, w \in \{0,1\}$:

$$\theta^1_{a,b,c,d,e} = \begin{cases} \alpha & \text{se } a+b+c+d+e \leq 2, \\ \beta & \text{se } a+b+c+d+e \geq 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \theta^0_{a,b,c,d,e} \equiv 1 - \theta^1_{a,b,c,d,e}$$

onde $\alpha,\ \beta \in [0,1]$ são constantes. Então temos um operador $V\ :\ M \to M$ definido assim: Para cada configuração $s = (\ldots, s_{-2}, s_{-1}, s_0\ , s_1\ , s_2, \ldots) \in S$, $\quad Vs$ é uma medida de produto, para aquela

$$\forall\ i \in Z\ :\ (Vs)(x_i = w) = \theta^w_{s_{i-2},s_{i-1},s_i,s_{i+1},s_{i+2}}.$$

Problemas:

1) Prove que V é monotono se e somente se $\alpha \leq \beta$.

2) Prove que se $\alpha \leq \beta$, o limite $\lim_{t\to\infty} V^t\delta_0$ existe.

3) Se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, o limite $\lim_{t\to\infty} V^t\delta_0$ existe ou não?

4) Prove que se $0.49 < \alpha \leq \beta < 0.51$, o operador V é ergodico.

5) Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, o operador V é ergodico ou não?

6) O que é a medida invarianta para V se $\alpha = \beta$?

Nota: Você pode usar todas as teoremas e fatos incluidos no deveres de casa de curso, mas cada vez você deve referir na número de dever de casa.

References

[1] Discrete Local Markov Systems. A. Toom, N. Vasilyev, O. Stavskaya, L. Mityushin, G. Kurdyumov and S. Pirogov. *Stochastic Cellular Systems : ergodicity, memory, morphogenesis.* Ed. by R. Dobrushin, V. Kryukov and A. Toom. Nonlinear Science: theory and applications, Manchester University Press, 1990, pp. 1-182.