

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

TEOREMAS DE DUALIDADE USADOS NA PERCOLAÇÃO

PEDRO FERREIRA DE LIMA

Orientador: Andrei Toom

Área de concentração: probabilidade

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do grau de
Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife-Pe, março de 2002

À memória de meus pais
Salustino e Carolina.

Agradecimentos

- Aos meus familiares em especial aos meus irmãos João e Francisco, a minha irmã Rosa e a minha cunhada Francinete por tudo que sempre fizeram por mim;

- Aos meus amigos:

Oberlan da Silva, José Pereira, Maria Vieira e Geraldo Rufino pela amizade e confiança durante boa parte de minha vida;

- Ao professor da UFPB: Antônio José da Silva pelo estímulo.

- Ao Professor Andrei Toom pela paciência, seriedade e dedicação como conduziu-me na orientação desse trabalho;

- Aos meus professores da pós-graduação em Estatística da UFPE:

Isaac M. Xavier Junior, Klaus L. P. Vasconcelos, Francisco Cribari Neto, Andrei Toom, Claudia R. O. P. Lima, Manoel R. de Sena Junior;

- Aos meus colegas de mestrado: Franklin, Marcelo, Nilton, Soraya e Waldemar por tudo que passamos juntos, sobretudo nos momentos difíceis;

- Aos professores e funcionários do Departamento de Estatística da UFPE em especial à professora Cristina pela amizade e preocupação demonstrada, a secretária Valéria e ao técnico em informática Cândido;

- À Andréa V. Rocha pela valiosíssima contribuição, paciência e companheirismo;

- À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

A percolação é uma parte da teoria da probabilidade moderna que tem recebido muita atenção nas últimas décadas. Um dos fatos mais importantes da teoria da percolação é a existência de valores críticos não triviais, isto é, estritamente entre zero e um.

O principal objetivo dessa tese é provar quatro teoremas de dualidade que podem ajudar a estimar valores críticos para grafos planares. Os teoremas que provaremos são aplicáveis respectivamente a grafos finitos não orientados, infinitos não orientados, finitos orientados e infinitos orientados. Também apresentamos exemplos de suas aplicações na percolação e no estudo dos autômatas celulares.

Abstract

Percolation is a part of the modern probability theory, which has received much attention in the last decades. One of the most important facts about percolation is existence of critical values, which are strictly between zero and one.

The principal objective of this thesis is to prove four theorems about duality for planar graphs, which may be used to estimate critical values of percolation. The theorems, which we prove, pertain respectively to finite non-oriented, infinite non-oriented, finite oriented and infinite oriented graphs. We also present examples of their application to percolation and cellular automata

Sumário

Capítulo 1 - Introdução	1
Caminhos	2
Contornos	2
Percolação	3
Teorema de Jordan	5
Colocando um grafo dentro do \mathbb{R}^2	7
Vizinhança, raios e setores	9
Dualidade	8
Teoremas	13
Capítulo 2 - Provas dos Teoremas	14
Prova do Teorema 1	14
Prova do Teorema 2	17
Prova do Teorema 3	20
Prova do Teorema 4	22
Capítulo 3 - Referências, Comentários e Exemplos	25
Exemplo 1	26
Exemplo 2	30
Exemplo 3	33
Exemplo 4	35
Exemplo 5	39
Referências	43

Capítulo 1 - Introdução

A percolação é uma parte importante da teoria da probabilidade moderna. No capítulo 3 apresentamos algumas referências sobre o assunto.

Um dos fatos mais importantes da teoria da percolação é a existência de valores críticos não triviais, isto é, estritamente entre zero e um. Encontrar esses valores críticos exatos não é tarefa fácil; para a maioria dos casos podemos obter apenas estimativas. Tipicamente achar uma estimativa inferior é simples, no entanto a obtenção de uma estimativa superior é mais difícil. Quando o grafo é planar, podemos obtê-las utilizando vários teoremas de dualidade. Nossa tarefa principal é provar alguns deles, cujas demonstrações até agora ainda não foram apresentadas mesmo quando esses teoremas foram usados. Isto constitui um fato estranho uma vez que a Matemática prima por afirmações rigorosas, a utilização de resultados não comprovados não é permitido.

Definições

Grafo

Definimos um *grafo* G , pelos conjuntos finitos ou contáveis: V de *vértices*, E de *elos* e duas funções $\text{fim}_0 : E \rightarrow V$ e $\text{fim}_1 : E \rightarrow V$ que associa a cada elo dois vértices. Dizemos que cada elo e *conecta* $\text{fim}_0(e)$ ao $\text{fim}_1(e)$, os quais chamamos *finais* desse elo. Se $\text{fim}_0(e) = \text{fim}_1(e)$, isto é, quando e conecta um vértice com ele mesmo, dizemos que e é um *laço*. Suponhamos que cada vértice v é fim de um número finito de elos. Logo, se um dos conjuntos V ou E é finito, o outro é finito também. Se um grafo G tem conjuntos V de vértices e E de elos infinito, então G é dito *infinito* caso contrário G é *finito*.

Um grafo é *não-orientado* se cada elo pode estar aberto ou fechado, independentemente de qualquer outro elo. Um grafo é *orientado* se cada um de seus elos puder está aberto ou fechado

Percolação

Dado um grafo não orientado G :

1. Dizemos que existe *percolação* de um vértice α até um vértice β , em G , se existir um caminho aberto, finito conectando os vértices α e β .
2. Dizemos que existe *percolação* de um vértice α até ∞ , se existir um caminho aberto, auto-evitando, infinito que começa em α .

Dado um grafo orientado G :

1. Dizemos que existe *percolação* de um vértice α até um vértice β , em G , se existir um caminho finito, auto-evitando, conectando o vértice α a β , aberto de α até β .
2. Dizemos que existe *percolação* de um vértice α até ∞ se existir um caminho infinito, auto-evitando, que começa em α e aberto nessa direção.

Em todos os casos um vértice v é dito *visitado* se existir um caminho aberto de α até v . O lema 1 a seguir é válido para todos os grafos aqui considerados, a saber, os orientados e não orientados.

Afirmção 1 - *Para todo vértice visitado v , existe um caminho aberto auto-evitando de α até v .*

Prova:

Como o vértice v é visitado, há um caminho aberto H de α até v . Se não está auto-evitando, visita algum vértice duas vezes e dá uma volta entre essas visitas. Eliminamos esta volta (incluindo apenas uma das visitas) de H , obtendo um caminho H_1 mais curto que o anterior e que ainda é aberto e conecta α ao vértice v . Se H_1 ainda não for auto-evitando, eliminamos outra volta. Como o caminho torna-se mais curto a cada passo, este deve parar quando adquirirmos um caminho sem voltas. Obtemos, assim, um caminho aberto, auto-evitando de α até nosso vértice v . *A afirmação 1 está provada.*

Lema 1 - *Dizer que existe percolação de α até ∞ equivale dizer que o conjunto de vértices visitados é infinito.*

Prova:

Numa direção isto é evidente pois existindo percolação, por definição, o referido caminho existe, então o conjunto de vértices nesse caminho é infinito e todos eles são visitados.

Podemos codificar um caminho que começa em α pela seqüência dos elos utilizados à medida que os percorremos. Suponha que o conjunto de vértices visitados é infinito. Vamos chamar de S , o conjunto de caminhos finitos, abertos e auto-evitando que partem de α . Pela afirmação 1, para qualquer vértice visitado existe um caminho aberto auto-evitando que conduz até ele. então S é infinito. Lembramos que para cada vértice de G o número de elos com fins neste vértice é finito; denotamos esse número por k_v , onde v é o vértice de incidência. Começamos classificando S em k_α subconjuntos de acordo com a utilização dos elos incidentes em α , onde k_α é o número de fins de elos no vértice α .

Temos como primeiro passo:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{k_\alpha-1} \cup S_{k_\alpha}.$$

Como a união desses conjuntos é infinita, pelo menos um deles também é infinito. Seja S_1 esse conjunto finito. Os outros casos são análogos. Então classificamos S_1 em k_{v_1} classes de acordo com o número de elos incidentes em v_1 , onde v_1 é o primeiro vértice que sucede α nesse caminho e k_{v_1} é o número de fins de elos no vértice v_1 .

$$S_1 = S_{(1, 1)} \cup S_{(1, 2)} \cup \dots \cup S_{(1, k_{v_1})}.$$

Mais uma vez, pelo menos um desses subconjuntos deve ser infinito. Seja, digamos, $S_{(1, 1)}$, novamente, o classificamos:

$$S_{(1, 1)} = S_{(1, 1, 1)} \cup S_{(1, 1, 2)} \cup \dots \cup S_{(1, 1, k_{v_2})}$$

Onde k_{v_2} é o número de fins de elos no vértice v_2 .

Novamente pelo menos um desses subconjuntos deve ser infinito. Podemos continuar indutivamente. No n -ésimo passo de nosso argumento indutivo, obtemos uma seqüência de n elos tal que o conjunto de caminhos finitos, abertos e auto-evitando que começam com esses elos é infinito. Como podemos continuar com este argumento indefinidamente, essa seqüência cresce infinitamente, definindo um caminho infinito aberto, auto-evitando partindo de α . *O lema 1 está provado.*

Afirmção 2 -

Para todo vértice α de um grafo conectado e infinito G existe um caminho infinito e auto-evitando iniciando em α .

Prova: Suponha que todos os elos de G são abertos. Como G é conectado, todos seus vértices são visitados. G é infinito, logo o conjunto de vértices visitados é infinito. De acordo com o lema 1, existe um caminho auto-evitando. *A afirmação 2 está provada.*

Uma *curva* é uma função contínua f de $[0, 1]$ em \mathbb{R}^2 . Uma curva é dita *auto-evitando* se $\forall x, y \in [0, 1]$ temos que $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Uma *curva fechada* é uma função contínua f do S^1 em \mathbb{R}^2 . Uma *Curva de Jordan* é uma curva fechada auto-evitando, isto é, os valores desta função são diferentes para todos os elementos diferentes de S^1 .

No decorrer do nosso trabalho usaremos o teorema de Jordan de acordo com as definições do capítulo XVII do livro [8], páginas 355-363.

Afirmção 3 (*Teorema de Jordan*) - *Seja \mathcal{F}^1 uma curva de Jordan no \mathbb{R}^2 . Então $\mathbb{R}^2 - \mathcal{F}^1$ tem exatamente dois componentes, ambos abertos, cada um deles tem \mathcal{F}^1 como sua fronteira completa.*

Prova - Este teorema está provado em [8].

Neste trabalho vamos considerar curvas muito especiais de forma que satisfaçam as condições abaixo:

Uma *curva poligonal* em \mathbb{R}^2 , é uma função contínua e parcialmente linear

$$f(t) = (x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}),$$

onde

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = a_1 + b_1t, \quad y(t) = c_1 + d_1t, \quad \text{se } 0 = t_0 \leq t \leq t_1 \\ x(t) = a_2 + b_2t, \quad y(t) = c_2 + d_2t, \quad \text{se } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots \\ x(t) = a_k + b_kt, \quad y(t) = c_k + d_kt, \quad \text{se } t_{k-1} \leq t \leq t_k = 1 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Os pontos $f(0)$ e $f(1)$ são chamados os *finis desta curva*. Se $f(0) = f(1)$, dizemos que esta curva é *fechada*.

Os pontos $(x(t_i), y(t_i))$ são chamados *esquinas* e os conjuntos $\{f_c(t) | t_i \leq t \leq t_{i+1}\}$ são chamados *pedaços*.

Seja C uma curva fechada no plano, que evita um ponto P no mesmo plano. Então existe um número inteiro $W(C)$ de suas *voltas* em torno de P na orientação anti-horária. Assim, se uma curva fechada C é uma concatenação de duas curvas fechadas C_1 e C_2 , então

$$W(C) = W(C_1) + W(C_2).$$

Afirmção 4 - *Se uma curva de Jordan C evita um ponto P no mesmo plano, o número de suas voltas em torno de P é igual ± 1 se P está dentro de C e 0 se P está fora de C .*

Prova - Não provaremos esta afirmação, pois é bem conhecida na topologia. Para curvas do tipo (1) é fácil provar por indução em número de pedaços.

Colocando um grafo G dentro do \mathbb{R}^2

Dizemos que um grafo G está inserido no \mathbb{R}^2 se satisfaz as seguintes condições:

1. Cada vértice v de G está associado a um ponto $P(v) \in \mathbb{R}^2$. Vértices diferentes estão associados a pontos diferentes. Denotamos por $P(V)$ o conjunto de pontos $\{P(v)|v \in V\}$;
2. Cada elo e de G está representado por uma única curva poligonal. Esta curva é auto-evitando, exceto quando e é um *laço*, nesse caso $f_e(0) = f_e(1)$.
3. Dentro de cada subconjunto limitado do plano há apenas um número finito de representações de vértices e de esquinas.
4. Se $e_i \neq e_j$ são dois elos diferentes, então $\forall x, y \in (0, 1) \implies f_{e_i}(x) \neq f_{e_j}(y)$;

Dizemos que o grafo que está colocado no plano e satisfaz todas as condições acima é *planar*. Observe que o nosso uso é diferente do comum em vários artigos, pois para esses “*grafo planar*” é um grafo que pode ser desenhado no plano \mathbb{R}^2 satisfazendo todas as condições acima.

Dado grafo planar G denotamos o conjunto $\{(x(t), y(t)), 0 \leq t \leq 1\}$ por $P(e)$. e por $P(G)$ e a *representação de G* que é a união de $P(\cdot)$ para todos os elos de G . Todos os componentes conectados de $\mathbb{R} \setminus P(G)$ são abertos. Os chamaremos de *países abertos* de G . Um *país fechado* é o fecho de um país aberto. É claro que o conjunto dos países é finito se e somente se o grafo é finito.

Lema 2 - *Dado grafo G planar e um ponto P no mesmo plano que não pertence a representação de G . Se existir em G um contorno cuja representação dá uma volta em torno de P , então existe um contorno auto-evitando cuja representação dá uma volta em torno de P .*

Prova - Denotamos por S o referido contorno. Suponha que S não é auto-evitando, ou seja, ele passa por um vértice w de G mais de uma vez. Podemos denotar:

$$S = (w, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k = w, e_{k+1}, v_{k+1}, \dots, e_n, v_n = w).$$

Observe que se $v_k = w$, então S visita w pelo menos duas vezes. Representamos esse contorno como uma concatenação de dois contornos S_1 e S_2 , onde

$$S_1 = (w, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k = w) \text{ e } S_2 = (w, e_{k+1}, v_{k+1}, \dots, e_n, v_n = w).$$

Se $W(S_1) = W(S_2) = 0$, teríamos $W(S) = 0$ que contraria nossa hipótese. Logo $W(S_1) \neq 0$ ou $W(S_2) \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidades, que $W(S_1) \neq 0$. Aplicamos o mesmo argumento para S_1 etc. A cada passo o número de elos diminui, logo a indução deve parar. Após isso obtemos um contorno auto-evitando S' tal que $W(S') \neq 0$. Devido a afirmação 4, $W(S') = \pm 1$. Se for -1 , percorremos o mesmo contorno na direção oposta. *O lema 2 está provado.*

Dualidade

Dizemos que dois grafos planares e conectados G e G' colocados no mesmo plano \mathbb{R}^2 são *duais* se satisfazem as seguintes condições:

1. Existe uma correspondência 1-a-1 entre os países de G e os vértices de G' , chamada dualidade, tal que cada país aberto de G contém o seu vértice dual de G' ;
2. Existe uma correspondência 1-a-1 entre os vértices de G e os países de G' , chamada dualidade, tal que cada vértice de G está no interior de seu país dual em G' ;
3. Existe uma correspondência 1-a-1 entre os elos de G e os elos de G' chamada dualidade tal que cada elo de cada grafo cruza o seu elo dual do seu grafo dual num único ponto. Elos de G e de G' não duais não têm pontos comuns.

Observe que a relação de dualidade é reflexiva, isto é, se G' é dual de G , então G é dual de G' . É claro que se um grafo do par dual for finito o outro deve ser finito também.

Vizinhança - Dado um ponto $P \in \mathbb{R}^2$, uma vizinhança de P de raio r é o disco de centro P e raio r que a denotaremos por r -vizinhança.

Vizinhança pura - Dado (G, G') um par de grafos duais e $P(v)$ a representação de um vértice v de G . Uma r -vizinhança de $P(v)$ é dita *pura* se a intersecção da representação dos grafos G e G' com essa r -vizinhança tem apenas o ponto $P(v)$ e segmentos retos (começos de representações de elos de G começando em v) conectando $P(v)$ a borda do disco e a intersecção da representação de G' com esta r -vizinhança é vazia.

Raio - parte $P(e)$ dentro da vizinhança pura de v , onde v é um fim de e .

Setor - É a região de uma r -vizinhança pura compreendida entre dois raios adjacentes e a borda dessa r -vizinhança.

Lema 3 - Dado par (G, G') de grafos duais. Para todo vértice v de G existe pelo menos uma r -vizinhança pura de $P(v)$.

Prova: - Devido a condição 3 na página 7, a 1-vizinhança de $P(v)$ contém apenas um número finito de vértices de G e de G' e intercepta um número, também finito, de pedaços. Podemos listar as distâncias entre v e todos os outros vértices de G e de G' que estão nessa 1-vizinhança, seja $r_1 > 0$ a menor dessas distâncias.

Vamos dividir todos os pedaços de G e de G' em dois grupos: O *grupo 1* formado por todos os pedaços que têm um final em $P(v)$ e o *grupo 2* por todos os outros.

Para cada pedaço do grupo 2 existe uma menor distância positiva que o separa de $P(v)$. Seja $r_2 > 0$ o mínimo de todas essas distâncias. Seja $r = \min(r_1, r_2) > 0$. A r -vizinhança de $P(v)$ é o que queremos. Os pedaços do grupo 1 formam os raios que chegam em v . *O lema 3 está provado.*

Seja G um grafo conectado com um elo e tal que se retirar e , o grafo torna-se desconectado. Neste caso chamaremos e de *ponte*. Observe que se (G, G') é um par de grafos duais, onde (e, e') é um par de elos duais, se e é uma ponte, e' é um laço e vice-versa.

A operação seguinte, denotada por Υ_e pode ser aplicada para um par (G, G') de grafos duais e um elo fechado e de G , que não é uma ponte, para obter um outro par de grafos. ela consiste em duas partes A e B .

A - *Retirar o elo e do grafo G* -

Retire e de grafo G sem mudar os outros vértices e outros elos. Retire também a representação deste elo no plano sem mudar as representações dos outros elos. Os países separados por este elo tornam-se um só e todo o resto permanecem como estavam antes.

B - *Encolher o elo e' do grafo G'* -

Primeiro elimine este elo e e combine seus fins num vértice w chamado *duplo*. A representação de um dos seus fins e sua vizinhança suficientemente pequena são eliminados do plano. A representação restante chamaremos de representação do vértice *duplo*. Todos os elos cujas curvas representantes chegavam na representação do vértice retirado passam a chegar na representação do vértice duplo. Todas as outras representações dos vértices e dos elos restantes permanecem imutáveis.

A operação simétrica $\Upsilon_{e'}$ é definida analogamente e pode ser aplicada quando e' é fechado e não é uma ponte; neste caso retiramos e' e encolhemos e .

Lema 4 - *Dado par de grafos duais (G, G') . Os grafos obtidos de (G, G') após a aplicação da operação Υ_e são duais.*

Prova - Denotamos por (G_1, G'_1) o par de grafos obtidos de (G, G') ao aplicar a operação Υ_e . Vamos mostrar que (G_1, G'_1) satisfaz todas as condições da definição de dualidade da página 8.

Prova para a condição 1 - Ao retirar um elo fechado e de G os dois países de G que são separados por e tornam-se em um o qual contém dois vértices de G' , mas o elo e' que conecta esses vértices

é encolhido e esses vértices passam a ser um só. Todos os outros países de G_1 e vértices de G'_1 permanecem iguais aos de G e G' respectivamente. Assim a condição (1) continua válida.

Prova para a condição 2 - Retirando um elo fechado e de G , os países de G'_1 são os mesmos de G' , mudando apenas sua representação no plano. Os vértices de G também continuam os mesmos. Logo a condição também permanece válida.

Prova para a condição 3 - Evidente.

Definimos também uma outra operação Φ_e a qual pode ser aplicada para um par de grafos duais (G, G') e uma ponte (ver página 10) e de G , para obter um outro par de grafos.

- | | |
|---|---|
| <p>A - Eliminados de G a ponte e uma parte conectada obtida após disto. Também eliminamos de $P(G)$ todas as representações de vértices e elos retirados de G.</p> <p>B - O elo de G' que é dual à ponte é um laço e'. O grafo G', salvo e' e seus fins (que coincidem), consiste de duas partes: dentro do laço e' e fora do laço e', cada parte corresponde a uma parte de G após retirar a ponte e, das quais uma está dentro e outra fora do laço e'. Eliminamos de G' a parte correspondente a parte eliminada de G e retiramos representações correspondentes do plano.</p> | } |
|---|---|

Lema 5 - *Dado par de grafos duais (G, G') . Os grafos obtidos de (G, G') após a aplicação da operação Φ_e são duais.*

Prova - Observe que:

- a) - Num lado do laço e' tudo é retirado de ambos os grafos G e G' .
- b) - No outro lado do laço e' tudo fica sem mudanças.
- c) - Ambos a ponte e e o laço e' são retirados;
- d) - Os fins (que coincidem) do laço e' não são eliminados e ainda correspondem ao mesmo país do grafo G_1 , como antes.

Assim o lema 5 está provado.

Voltemos aos nossos resultados principais. Considere as regras a seguir: (G, G')

Regra para um par de grafos duais não-orientados:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Todo elo do grafo } G' \text{ está aberto se e somente} \\ \text{se o elo correspondente do grafo } G \text{ está fechado.} \end{array} \right\} \quad (2)$$

Considere (G, G') grafos duais e orientados. A relação entre direções dos seus elos obedecem a seguinte relação:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dados elos duais } e \text{ e } e', \text{ para cada direção de } e \text{ a direção de} \\ e' \text{ correspondente é a direção da direita para esquerda quando} \\ \text{percorremos na direção indicada. Todo elo do grafo } G' \text{ está} \\ \text{aberto numa certa direção se e somente se o elo correspondente} \\ \text{do grafo } G \text{ está fechado na direção correspondente.} \end{array} \right\} \quad (3)$$

Teoremas

Os resultados mais importantes desta tese são as provas dos quatro teoremas a seguir:

Teorema 1 -

Seja (G, G') um par de grafos duais, finitos, não orientados, satisfazendo a regra (2). Não há percolação do vértice α ao β , em G , se e somente se, em G' há um contorno aberto, auto evitando cuja representação, no plano, deixa $P(\alpha)$ e $P(\beta)$ em regiões distintas.

Teorema 2 -

Seja (G, G') um par de grafos duais, infinitos, não orientados, satisfazendo a regra (2). Não há percolação de um vértice α até ∞ no grafo G , se e somente se, em G' há um contorno aberto, auto evitando cuja representação deixa o ponto $P(\alpha)$ na região limitada.

Teorema 3 -

Seja (G, G') um par de grafos duais, finitos, orientados, satisfazendo a regra (3). Não há percolação do vértice α para o vértice β , no grafo G , se e somente se, em G' , há um contorno auto evitando, aberto numa direção tal que sua representação, no plano, deixa o ponto $P(\alpha)$ à esquerda e $P(\beta)$ à direita.

Teorema 4 -

Seja (G, G') um par de grafos duais, infinitos, orientados, satisfazendo a regra (3). Não há percolação do vértice α até ∞ no grafo G , se e somente se, em G' há um contorno aberto, auto evitando, cuja representação no plano deixa o ponto $P(\alpha)$ na região finita e o cerca na direção anti-horária.

Capítulo 2 - Provas dos Teoremas

Prova do Teorema 1

Definições para uso na demonstração do Teorema 1

Denotamos por (G, G') um par de grafos duais não orientados e finitos.

Caminho viável - Um caminho aberto e auto-evitando, no grafo G , conectando α a β .

Contorno viável - Um contorno aberto e auto-evitando no grafo G' cuja representação no plano deixa $P(\alpha)$ e $P(\beta)$ em regiões distintas.

Complexidade de um par grafos (G, G') - A soma dos números de vértices, elos e países de G . (Pelo teorema de Euler, complexidade é igual a duas vezes o número de elos de G mais dois. Então a complexidade é sempre par).

Vamos provar o teorema 1 nas duas direções.

Numa direção. Suponha que existe caminho viável H em G e contorno viável C em G' e obtemos uma contradição. Vamos denotar por H^* e C^* as representações no plano do caminho H e do contorno C respectivamente.

Por hipótese temos que $P(\alpha)$ e $P(\beta)$ ficam em regiões distintas de $\mathbb{R}^2 \setminus C^*$. Aplicando o teorema de *Jordan* (afirmação 3 da página 5), obtemos que H^* e C^* têm pelo menos um ponto em comum. Seja Q^* o primeiro ponto de intersecção com C^* quando seguimos por H^* iniciando em $P(\alpha)$. Então Q^* pertence a representações de dois elos duais um de G e outro de G' . Pela regra (2) ambos os elos não podem estar abertos ao mesmo tempo. Mas estão abertos por hipótese. Isto é uma contradição. *O teorema 1 está provado numa direção.*

Noutra direção. Vamos usar indução em complexidade para provar que para cada par de grafos duais (G, G') a seguinte hipótese é verdadeira.

Hipótese de Indução :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ou existe um caminho viável em } G, \\ \text{ou existe um contorno viável em } G'. \end{array} \right\}$$

Base de Indução - O valor mínimo de complexidade n é 2. Se $n = 2$, então G têm apenas um país e um vértice e não tem elos. Neste caso $\alpha = \beta$ e é claro que a hipótese de indução está correta: há um caminho viável (que contém só um vértice), e não há contorno viável.

Passo de Indução - Suponha que nossa hipótese de indução é válida para todos os pares cuja complexidade é menor que n , e provemos que ela também é verdadeira para um par (G, G') , cuja a complexidade é n . Consideramos os seguintes casos:

Caso 1 - G tem pelo menos um elo que não é nem ponte, nem laço.

Se este elo e está fechado, aplicamos Υ_e , caso contrário aplicamos $\Upsilon_{e'}$. O par de grafos (G_1, G'_1) obtidos de (G, G') tem complexidade menor que a de (G, G') . Logo, supondo que a nossa hipótese de indução é verdadeira, ou G_1 tem caminho viável, ou G'_1 tem um contorno viável.

Suponha que em G_1 existe um caminho viável. Se este caminho evita o vértice duplo, o mesmo caminho existe em G . Se o suposto caminho inclui o vértice duplo, em G esse vértice é separado em dois que são conectados pelo elo aberto que pode ser inserido completando um caminho viável em G .

Suponha que existe, em G'_1 , um contorno viável. Se este contorno evita o vértice duplo, G' tem o mesmo contorno. Caso contrário, ao inserimos o elo que foi encolhido também obtemos um contorno viável em G' .

Caso 2 - G tem (pelo menos) uma ponte aberta. Aplicamos Υ_e e argumentamos como no caso 1.

Caso 3 - G tem (pelo menos) uma ponte fechada e α e β estão em partes diferentes.

A hipótese de indução é evidente para nosso par (G, G') , pois o elo dual desta ponte é um contorno viável.

Caso 4 - G tem (pelo menos) uma ponte fechada e α e β estão na mesma parte.

Neste caso aplicamos a operação Φ_e e argumentamos como no caso 1.

Caso 5 - Todos os elos de G são laços. Neste caso G tem só um vértice. Então $\alpha = \beta$ e a hipótese de indução é evidente.

A outra direção do teorema 1 está provada. Logo o teorema 1 está provado.

Prova do Teorema 2

Definições para uso na demonstração do teorema 2

Denotamos por (G, G') um par de grafos duais não orientados e infinitos.

Caminho Viável - Um caminho aberto, infinito e auto-evitando no grafo G que inicia em α ;

Contorno Viável - Um contorno aberto e auto-evitando no grafo G' , tal que sua representação deixa o ponto $P(\alpha)$ na região finita;

Tipos dos Vértices e Países - Um vértice v de G é dito *tipo 1*, se existir em G um caminho aberto de α até v . Observe que vértice tipo 1 é o que chamamos antes de vértice visitado. É *tipo 2* se existir em G um caminho auto-evitando infinito iniciando em v e nesse caminho não tem vértices tipo 1. É *tipo 3* se não for tipo 1, nem tipo 2. Um país do grafo G' é dito *tipo $i=1,2,3$* se corresponde a um vértice de G , do tipo i . Observe que cada vértice de G e conseqüentemente cada país de G' tem exatamente um tipo.

Vamos provar o teorema 2 nas duas direções.

Numa direção.

Suponha que existe em G um caminho viável H e existe em G' um contorno viável C e obtemos uma contradição. Vamos denotar por H^* e C^* as representações no plano do caminho H e do contorno C respectivamente.

A região interior a C^* é limitada, logo contem um número finito de vértices de acordo com a condição 3 da página 7. Como H é auto-evitando e infinito, contém um vértice β cuja representação encontra-se no exterior de C^* . Assim $P(\alpha)$ e $P(\beta)$ ficam em regiões distintas de $\mathbb{R}^2 \setminus C^*$. Aplicando o teorema de *Jordan* (afirmação 3 da página 5), obtemos que C^* e H^* têm pelo menos um ponto em comum. Então esse ponto pertence a representações de dois elos correspondentes um de G e

outro de G' . Pela regra (2), ambos não podem estar abertos ao mesmo tempo. Mas estão, isto é uma contradição. *O teorema 2 está provado numa direção.*

Antes de provar o teorema 2 na outra direção, vejamos as provas dos lemas a seguir:

Lema 6 - *Cada elo de G' que separa um país tipo 1 de um país não tipo 1 está aberto.*

Prova: Denotamos por e o elo correspondente de G que conecta um vértice tipo 1 v a um vértice w não tipo 1 de G . Observe que e está fechado. Logo e' está aberto. *O lema 6 está provado.*

Dado um grafo não-orientado G , um subconjunto H do conjunto V dos vértices de um grafo G é *conectado* se para quaisquer dois vértices A e B de H existir um caminho aberto em G conectando A e B e nesse caminho só existe vértices de H .

Lema 7 - *Todos os vértices tipo 1 formam um subconjunto conectado do conjunto de vértices V .*

Prova: Dados dois vértices u e v tipo 1 de G . Pela definição de vértice tipo 1, existe um caminho aberto conectando α a u e outro conectando α a v . Todos os vértices nesses caminhos são tipo 1, assim podemos formar um caminho aberto que começa em u , vai até α , depois até v . Este caminho só contém vértices tipo 1, conecta u a v e todos os seus elos estão abertos. *O lema 7 está provado.*

Agora vamos provar o teorema 2 na outra direção.

Suponha que não exista caminho viável em G e provamos que existe contorno viável em G' . Como não existe caminho viável, pelo lema 1 o número de vértices tipo 1 em G é finito, pois vértices visitados e tipo 1 são equivalente, logo podemos provar o teorema 2 na outra direção por indução por número de vértices tipo 1.

Hipótese de Indução :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se não há caminho viável e o número de vértices tipo} \\ \text{1 de } G \text{ é igual a } n, \text{ então existe um contorno viável.} \end{array} \right\}$$

Base de indução - O menor valor de n é 1. Dado grafo G contendo apenas um vértice tipo 1, a saber o vértice α . Pelo lema 3, existe uma r -vizinhança pura de $P(\alpha)$. Seja S_1, S_2, \dots, S_k a lista de todos os setores nesta vizinhança de $P(\alpha)$ no sentido anti-horário. Seja $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ os vértices de G' duais dos países que contém os setores S_1, S_2, \dots, S_k respectivamente. De acordo com o lema 6, os vértices $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ e os elos de G' duais aos elos de G que contém os raios na mesma ordem, formam um contorno aberto em G' que deixa $P(\alpha)$ em seu interior. Logo pelo lema 2 da página 7 existe em G' um contorno viável. A base de indução está provada.

Passo de indução - Tomamos um par de grafos duais (G, G') com $n > 1$ vértices tipo 1 no grafo G . Suponha que a hipótese de indução é verdadeira para todos os grafos com no máximo $n - 1$ vértices tipo 1 e provemos que ela também vale para (G, G') . Como o conjunto dos vértices tipo 1 contém mais de um elemento e é conectado, devido ao lema 7 existe dois vértices tipo 1 conectados por um elo aberto e . Como e não é um laço, e' não é uma ponte, então podemos aplicar a operação Υ_e e obtemos um novo par de grafos duais (G_1, G'_1) , onde G'_1 tem menos que n vértices tipo 1. Por nossa hipótese de indução, ou G_1 contém um caminho viável, ou G'_1 contém um contorno viável.

Agora argumentamos como no caso 1A da página 15.

O teorema 2 está provado.

Prova do Teorema 3

Definições para uso na demonstração do Teorema 3:

Denotamos por (G, G') um par de grafos duais orientados e finitos.

Caminho Viável - Um caminho auto-evitando, no grafo G , conectando α a β , aberto na direção de α para β

Contorno Viável - Um contorno auto-evitando, no grafo G' , aberto na direção tal que sua representação é uma curva fechada que deixa o ponto $P(\alpha)$ à esquerda e $P(\beta)$ à direita.

Tipos dos Vértices e Países - Um vértice v , de G , é dito *tipo 1*, se existir, em G , um caminho aberto de α para v , é *tipo 2*, se existir, em G , um caminho conectando v a β sem vértices tipo 1 e é *tipo 3* se não for tipo 1, nem tipo 2. Um país do grafo G' é dito *tipo i* , $i=1,2,3$ se corresponde a um vértice do tipo i ;

Observe que cada vértice de G e conseqüentemente cada país de G' tem exatamente um tipo.

Prova:

Numa direção - Vamos supor que existe em G um caminho viável H e existe em G' um contorno viável C e obtemos uma contradição. Vamos denotar por H^* e C^* as representações no plano do caminho H e do contorno C respectivamente.

Observamos que se um elo e de G é correspondente à um elo e' de G' , onde e' é uma parte de C , os fins de e estão em lados opostos de C^* e a direção de e é a direção do contorno C , correspondente a direção de e do lado direito para o esquerdo. Por hipótese temos que $P(\alpha)$ e $P(\beta)$ ficam em lados distintos de C^* , a saber $P(\alpha)$ no lado esquerdo e $P(\beta)$ no lado direito. Quando percorremos C no sentido anti-horário aplicando o teorema de *Jordan* (afirmação 3 da página 5) obtemos que C^* e H^* têm pelo menos um ponto em comum. Seja Q^* o primeiro ponto de intersecção entre C^* e H^* quando seguimos por H^* iniciando em $P(\alpha)$. Q^* pertence a representações de dois elos

correspondentes um de G e outro de G' . Pela regra (3), ambos os elos não podem estar abertos em direções correspondentes ao mesmo tempo. Mas eles estão: o elo do contorno C está aberto na direção de C e o elo do caminho H está aberto na direção da direita para a esquerda. Isto é uma contradição. *Logo o teorema 3 está provado nessa direção.*

Agora vamos provar o teorema 3 na outra direção - Vamos mostrar que se não existir um caminho viável no grafo G , então existe um contorno viável no grafo G' .

Considere um par de grafos $(\overline{G}, \overline{G}')$, que tem os mesmos conjuntos de vértices e de elos de G e G' mas são não orientados. É claro que o par de grafos $(\overline{G}, \overline{G}')$ são duais. Suponha que cada elo do grafo \overline{G} está aberto se e somente se ambos os finais desse elo são tipo 2 ou ambos não são do tipo 2. Todos os elos de \overline{G}' são abertos ou fechados de acordo com a regra (3). Como α é tipo 1 e β é tipo 2, todo caminho em \overline{G} conectando α a β tem um elo fechado, logo é fechado. Nesse caso pelo teorema 1 existe no grafo dual \overline{G}' , um contorno aberto auto-evitando separando α e β . Seja e'_1, e'_2, \dots, e'_n os elos desse contorno. Todos esses elos são abertos, logo todos os seus duais e_1, e_2, \dots, e_n , em \overline{G} são fechados. Observe que cada elo e_i conecta um vértice não tipo 2 com um tipo 2 do grafo G . Denotaremos esses vértices por u_1, u_2, \dots, u_n e v_1, v_2, \dots, v_n respectivamente. Provemos que todos os vértices u_1, u_2, \dots, u_n são tipo 1.

Suponha que existe um vértice u_k que não é tipo 1. Sabemos que u_k está conectado com um vértice v_k tipo 2 por um elo. O caminho de v_k até β não tem vértices tipo 1, logo também existe um caminho de u_k até β no qual não existe vértices tipo 1, daí u_k é tipo 2. Isso é contradição. Como todo u_i é tipo 1, logo, cada e_i é fechado na direção de u_i para v_i pois do contrário v_i seria tipo 1. Assim e'_i deve ser aberto em G' na direção tal que o país u_i está no lado esquerdo e o país v_i está no lado direito. Observe que u_i está dentro de nosso contorno e v_i está fora deste contorno pois v_i é tipo 2 e nenhum vértice deste tipo pode está dentro do contorno. Assim temos, em G' , um contorno auto-evitando que separa α de β e aberto na direção tal que deixa α no lado esquerdo e β no lado direito. *O teorema 3 está provado.*

Prova do Teorema 4

Definições para uso na demonstração do teorema 4:

Denotamos por (G, G') um par de grafos duais orientados e infinitos.

Caminho Viável - Um caminho auto-evitando infinito, iniciando em α no grafo G e aberto nesta direção.

Contorno Viável - Um contorno auto-evitando, no grafo G' , cuja representação é aberta na direção anti-horária e deixa o ponto $P(\alpha)$ em seu interior;

Tipos dos Vértices e Países - Um vértice v de G é dito *tipo 1*, se existir, em G , um caminho aberto de α para v . Observe que vértice tipo 1 é o que chamamos antes de vértice visitado. É *tipo 2*, se existir, em G , um caminho auto-evitando, infinito que inicia em v e nesse caminho não há vértices tipo 1. É *tipo 3* se não for tipo 1, nem tipo 2 ao mesmo tempo. Um país do grafo G' é dito *tipo $i=1,2,3$* se corresponde a um vértice do tipo i .

Observe que todo vértice de G e conseqüentemente cada país de G' tem exatamente um tipo.

Provas:

Numa direção

Vamos supor que existe um caminho H viável em G , um contorno viável C em G' e obtemos uma contradição. Denotaremos por H^* e C^* as representações no plano do caminho H e do contorno C respectivamente.

Pela condição 3 da página 7 existe apenas um conjunto finito de vértices de G dentro de C^* . Como H é auto-evitando e infinito, contém um vértice β cuja representação encontra-se no exterior de C^* . Assim $P(\alpha)$ e $P(\beta)$ ficam em regiões distintas de $\mathbb{R}^2 \setminus C^*$. Aplicando o teorema de *Jordan* (afirmação 3 da página 5), obtemos que C^* e H^* têm pelo menos um ponto em comum. Seja Q^* o primeiro ponto de intersecção de C^* com H^* quando seguimos por H^* iniciando em $P(\alpha)$. Então Q^*

pertence a representações de dois elos correspondentes um de G e outro de G' . Pela regra (3) esses elos não podem estar abertos ao mesmo tempo em direções correspondentes. Mas estão, o elo de H está aberto de dentro para fora do contorno e o de C está na direção anti-horária. Contradição.

Noutra direção - Vamos mostrar que se não existir um caminho viável em G , então existe um contorno viável no grafo G' .

Considere um par de grafos não orientados $(\overline{G}, \overline{G}')$, que tem os mesmos conjuntos de vértices e de elos de G e G' mas são não orientados. Seja cada elo do grafo \overline{G} aberto se e somente se os finais desse elo são ambos não tipo 2 ou ambos tipo 2. Os elos de \overline{G}' são abertos ou fechados de acordo com a regra (3) da página 12. Como não existe caminho viável em G , e vértice tipo 1 é equivalente a vértice visitado, podemos aplicar o lema 1 da página 4 e concluir que o conjunto de vértices tipo 1 é finito. Logo todo caminho auto-evitando iniciando em α tem um número finito de vértices tipo 1. Logo para cada caminho infinito existe um último vértice ω tipo 1 e todos os vértices que sucedem a este são tipo 2, ver definição de vértice tipo 2. De acordo com a definição de \overline{G} , o elo de \overline{G} que conecta ω com o seu sucessor, no caminho em questão, está fechado. Assim não existe percolação de α até ∞ em \overline{G} . Nesse caso podemos aplicar o teorema 2 e concluir que existe, no grafo dual \overline{G}' , um contorno aberto e auto-evitando, cercando α . Seja e'_1, e'_2, \dots, e'_n os elos desse contorno. Como todos esses elos são abertos, logo todos os seus duais e_1, e_2, \dots, e_n em \overline{G} são fechados. De acordo com a definição do grafo \overline{G} , cada elo e_i conecta um vértice não tipo 2 com um tipo 2. Denotaremos esses vértices por u_1, u_2, \dots, u_n e v_1, v_2, \dots, v_n respectivamente. Então cada e_i conecta um vértice u_i não tipo 2 a um vértice v_i tipo 2. É claro que u_i não pode ser tipo 3 pois está conectado a um vértice tipo 2 e assim a partir de v_i existe um caminho infinito sem vértices tipo 1, logo u_i seria tipo 2, mas isto é excluído. Então cada u_i é tipo 1. Logo e_i deve ser fechado em G na direção de u_i para v_i pois caso contrário v_i seria do tipo 1. Logo e'_i deve ser aberto em G' na direção tal que o país u_i está no lado esquerdo e o país v_i está no lado direito. Observe que u_i está dentro de nosso contorno e v_i está fora deste contorno pois v_i é tipo 2 e nenhum vértice deste tipo pode estar dentro

do contorno. Assim temos, em G' , um contorno auto-evitando cercando α e aberto na direção tal que deixa α no lado esquerdo, isto é na direção anti-horária.

O teorema 4 está provado.

Capítulo 3 - Referências, Comentários e Exemplos

Há muitos artigos e livros sobre percolação, mencionamos [4] como um dos mais novos e completos e contendo muitas referências.

Agora falaremos dos resultados parecidos com nossos teoremas.

O teorema 4 da página 77 de [6] apresenta algumas semelhanças com o nosso teorema 1, mas esse apenas se preocupa com conexão de grafos não cuidando com o que pode ocorrer com vértices particulares, caso que estudamos no nosso teorema 1. Se existe alguma forma de utilizá-lo na demonstração de nosso teorema 1, ela não é tão trivial.

[5] apresentou um resultado semelhante ao nosso teorema 2. Mas trata de percolação de vértices em grafos periódicos, apesar de ser infinito. Observe que em nossos resultados não fazemos tal suposição.

[9] contém um argumento parecido ao nosso teorema 2, mas só para grafos periódicos especiais.

[1] Usa uma afirmação parecida com o nosso teorema 3, mas sem provar, para provar não ergodicidade de alguns autômatos celulares. Veja nosso exemplo 5.

[2] apresenta vários lemas parecidos aos nossos teoremas 1,3 e 4, a saber: o lema 1.2 da página 11 sobre papel quadriculado. O lema 1.3 da página 14 que corresponde ao nosso teorema 2. O lema 1.4 na página 17 que corresponde ao nosso teorema 4. E por fim o lema 1.5 que corresponde ao nosso teorema 3. Todos sem provar e sem mencionar que o grafo deve ser conectado.

Ao longo da História muitos cientistas utilizaram a percolação para modelar diversos tipos de estudos. Broadbent [12] e Hammersley [9] foram os primeiros a falar de percolação. Eles também apresentaram um modelo para um sistema de canais em forma de grafo, onde cada canal é representado por um elo e cada elo tem uma probabilidade p de está aberto e $1 - p$ de está fechado.

A seguir exemplos de aplicação desse modelo.

Situação 1 - Uma cidade de pequeno porte cuja distribuição d'água parte de uma única caixa.

A rede de distribuição é feita por canos que são conectados. No meio de cada cano há uma válvula que pode está aberta (quando é permitida a passagem da água) ou fechada. Suponha que desejamos criar um modelo para estudar a probabilidade da água chegar a um determinado ponto β da cidade. Para o ponto β ser abastecido é necessário que exista uma seqüência de canos de α até β e todos eles devem está com suas válvulas abertas;

Situação 2 - O mesmo da situação 1, mas admitindo que a cidade tem dimensões infinitas;

Situação 3 - O mesmo da situação 1, mas assumindo que as válvulas podem permitir a passagem da água só numa direção;

Situação 4 - O mesmo da situação 3, admitindo que a cidade tem dimensões infinitas;

Assim nas situações 1 e 2, o modelo a ser considerado é o de percolação finita, não orientada e orientada respectivamente. Já nos casos 2 e 4 a percolação é infinita também não orientada e orientada respectivamente.

Vamos considerar exemplos particulares para mostrar como nossos teoremas podem ser aplicados.

Exemplo 1

Considere um grafo G cuja representação no plano é um pedaço do papel quadriculado em forma de quadrado de lado $2n$. Seja α o vértice do centro desse quadrado. Na figura 1 os elos do grafo G são representados pelos segmentos contínuos e os elos do grafo G' dual de G são representados por segmentos tracejados.

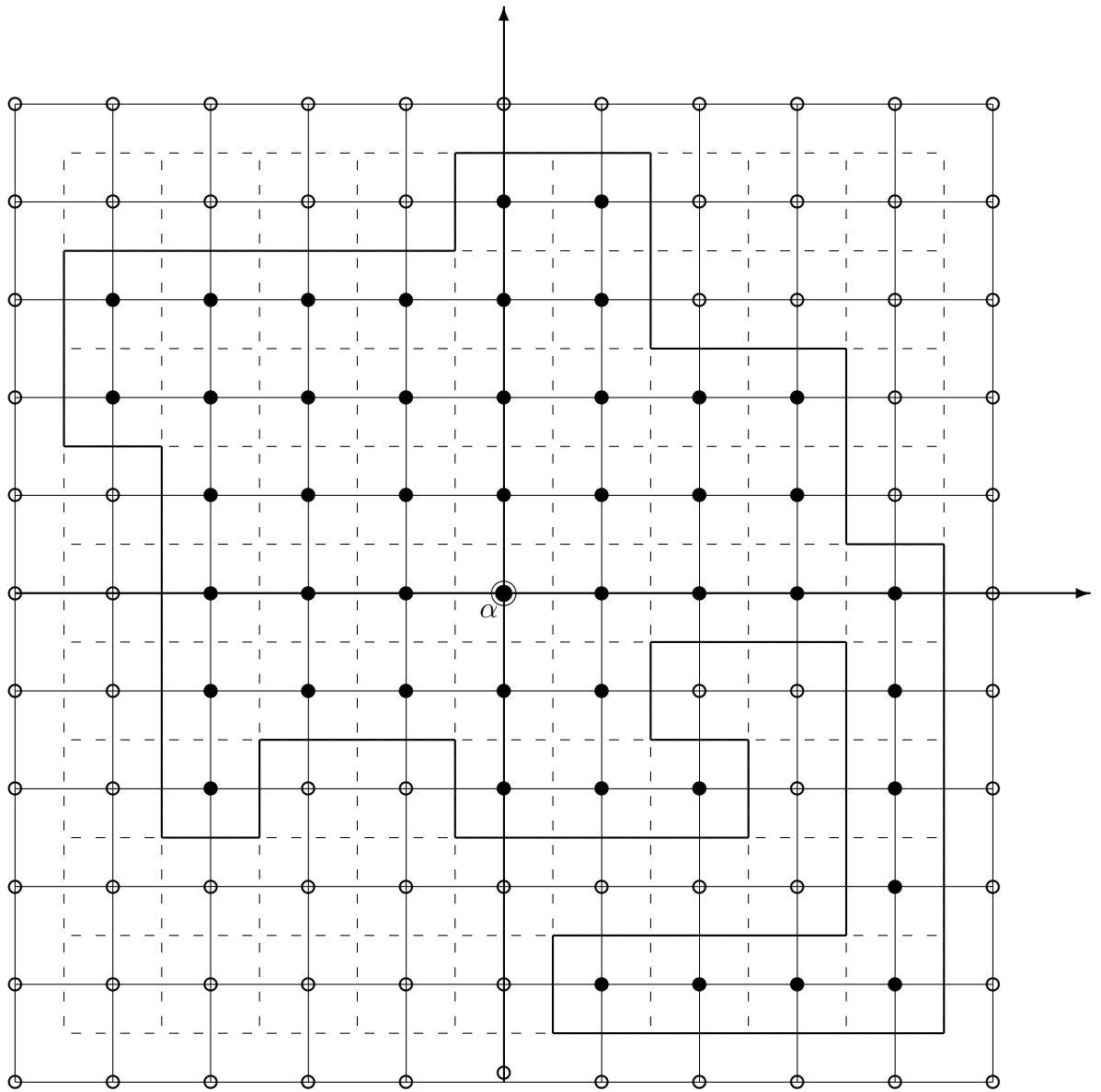


Figura 1 - Grafos G e G' com $n = 5$. As linhas contínuas representam os elos do grafo G . As tracejadas representam os elos do grafo G' . Os finais das linhas contínuas ou tracejadas representam os vértices de G e G' respectivamente.

Cada elo do grafo G está aberto com probabilidade ϵ independentemente de qualquer outro elo do grafo G . Ocorre percolação se existir um caminho aberto e auto-evitando de α até a periferia

do quadrado. Podemos imaginar também que existe um vértice β fora do quadrado e todos os vértices na periferia do quadrado são conectados com β com elos sempre abertos (não mostrados no desenho). Para simplificar o desenho no lugar de escrever $P(\alpha)$ colocamos simplesmente α .

Os grafos (G, G') satisfazem a regra (2) da página 12 por isso a probabilidade de um elo do grafo G' está aberto é a mesma do elo correspondente do grafo G está fechado, isto é, $(1 - \epsilon)$.

Mostremos que quando $n \rightarrow \infty$, o limite da probabilidade de percolação é zero, se ϵ é bastante pequeno.

Solução

Como α encontra-se no meio do quadrado de lado $2n$, então o menor caminho entre α e um ponto na periferia do quadrado tem n elos.

Considere um caminho auto-evitando que conecta α a um vértice na periferia de G . Seja k o número de elos nesse caminho. A probabilidade desse caminho está aberto é ϵ^k . Vamos denotar por a_k o número de caminhos com k elos que conecta α a um ponto na periferia do quadrado. Note que $a_k \leq 4 \times 3^{k-1}$.

Então a probabilidade de haver percolação é a probabilidade de pelo menos um desses caminhos está aberto, ou seja:

$$P(\text{percolação}) \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k \epsilon^k \leq \sum_{k=n}^{\infty} 4 \times 3^{k-1} \epsilon^k = \frac{4}{3} \sum_{k=n}^{\infty} (3\epsilon)^k = \frac{4}{3} \times \frac{(3\epsilon)^n}{1 - 3\epsilon}$$

Observe que $\frac{4}{3}$ e $\frac{1}{1-3\epsilon}$ são constantes. Dessa forma, se $\epsilon < \frac{1}{3}$, então $(3\epsilon)^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, assim $P(\text{percolação}) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Devemos mostrar agora que a probabilidade de percolação é separada de zero para ϵ suficientemente grande e todo $n \geq 1$.

Para isso vamos considerar a probabilidade de não percolação. Pelo nosso teorema 1, a não existência de percolação é equivalente a existência no grafo dual de um *contorno viável*, onde contorno viável é definido como na prova do teorema 1, ou seja, é um contorno aberto, cuja representação

no plano deixa α e β em regiões distintas. Cada contorno tem um número par de elos, logo a probabilidade de não percolação não pode superar:

$$P(\text{não percolação}) \leq \sum_{k=2}^{\infty} b_k (1 - \epsilon)^{2k},$$

onde b_k é o número de contornos com $2k$ elos. Resta estimar os valores de b_k .

Um contorno que separa α da periferia do quadrado fica completamente determinado quando especificamos o ponto E mais a esquerda da interseção do contorno com a parte positiva do eixo i e as direções de todos os seus elos. Para um contorno com $2k$ elos essa interseção pode ocorrer em, no máximo, k pontos distintos. Observe ainda que ao percorrer esse contorno no sentido anti-horário a direção do elo de G que contém E é norte e a direção de todos os outros elos pode assumir três valores diferentes. A direção do último elo é determinada pois o contorno deve voltar ao lugar de origem. Assim existem no máximo $k \times 3^{2k-2}$ contornos com $2k$ elos. Logo para todo k temos:

$$b_k \leq k \times 3^{2k-2}.$$

Como a probabilidade de um desses contornos está aberto é igual a $(1 - \epsilon)^{2k}$. Então:

$$\begin{aligned} P(\text{não percolação}) &\leq \sum_{k=2}^{\infty} b_k (1 - \epsilon)^{2k} \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} k \times 3^{2k-2} (1 - \epsilon)^{2k} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{k=2}^{\infty} k [9(1 - \epsilon)^2]^k \\ &= \frac{\delta}{9} \sum_{k=2}^{\infty} k \delta^{k-1} \\ &= \frac{\delta}{9} \times \left(\frac{1}{(1 - \delta)^2} - 1 \right), \end{aligned}$$

onde $\delta = 9(1 - \epsilon)^2$.

Observe que se $\epsilon > 0,8$, então $\delta < 0,65$ e a última expressão é menor que $\frac{1}{2}$. Então se $\epsilon > 0,8$, a probabilidade de percolação é maior que $\frac{1}{2}$ para todo n , conseqüentemente é separada de zero como queríamos mostrar.

Exemplo 2

Considere o grafo G planar infinito cuja representação no plano de G e seu dual G' tem a forma de reticulados triangulares e hexagonais. Pedacos deles são mostrados na figura abaixo.

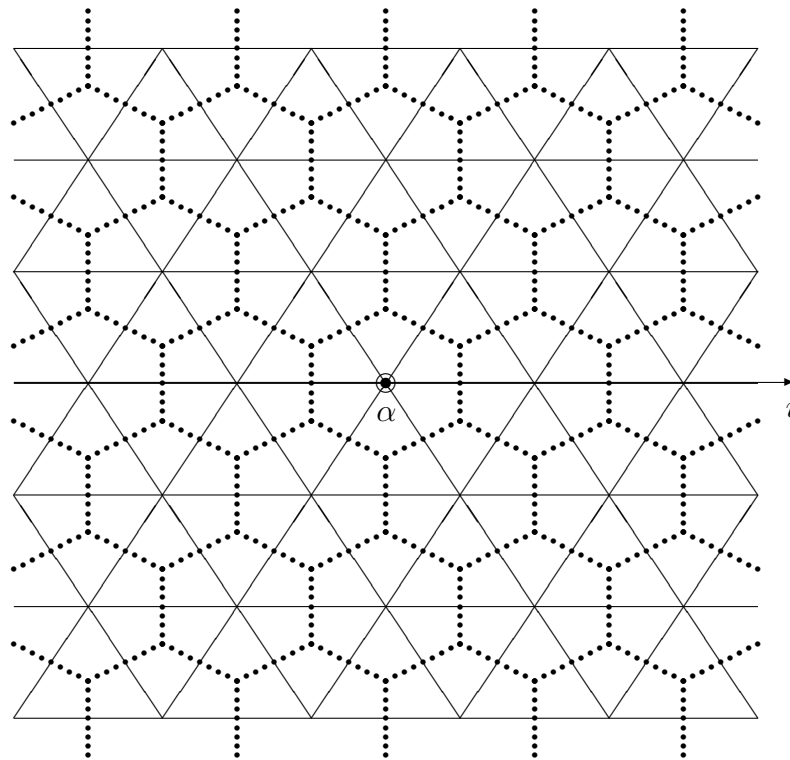


Figura 2 - Pedacos finitos dos grafos infinitos G e G' . As linhas contínuas mostram o grafo G que é representado por um reticulado triangular e as linhas pontilhadas mostram o grafo dual G' . Observe que o grafo dual G' é representado por um reticulado hexagonal.

Percolação de α até ∞ no grafo representado pela figura acima tem um valor crítico ϵ^* estritamente entre zero e um.

É suficiente mostrar que se ϵ for suficientemente pequeno, a probabilidade de percolação é zero; e se ϵ for suficientemente grande, a probabilidade de percolação é positiva. Dessa forma podemos definir ϵ^* como sendo o supremo desses valores de ϵ , para o qual a probabilidade de percolação é zero.

Provemos que a probabilidade de percolação é zero sempre que ϵ for suficientemente pequeno.

Queremos estimar a probabilidade de existir um caminho infinito partindo de α . Supondo que existe percolação de α até ∞ , então para todo n inteiro positivo existe pelo menos um caminho aberto de comprimento n iniciando em α . Se ϵ é a probabilidade de cada elo nesse caminho está aberto, como existem n elos nesse caminho então a probabilidade de todos eles estarem abertos é exatamente ϵ^n . O número de caminhos possíveis de comprimento n iniciando em α não supera $6 \times 5^{n-1}$. Logo a probabilidade de existir um caminho aberto de comprimento n iniciando em α não supera $\frac{6}{5}(5\epsilon)^n$. Esse valor converge para zero sempre que $\epsilon < \frac{1}{5}$ e $n \rightarrow \infty$. Isso prova que o limite da probabilidade de percolação é zero quando $n \rightarrow \infty$.

Provar que a probabilidade de percolação é positiva não é tão fácil mas aplicando o teorema 2 e reduzimos o problema a um caso parecido com o anterior. Com sua aplicação no lugar de encontrarmos qual a probabilidade de não existir um caminho aberto e infinito em G , queremos encontrar a probabilidade de existir um contorno aberto cercado α em G' .

Cada contorno nesse grafo tem no mínimo seis elos. Assim a probabilidade de existir um contorno aberto com n elos não supera

$$\sum_{n=6}^{\infty} b_n \times (1 - \epsilon)^n$$

onde b_n indica o número de contornos com n elos que cercam α . Resta estimar b_n .

Um contorno está completamente determinado quando especificamos a coordenada i do ponto mais à esquerda da interseção do contorno com a metade positiva do eixo i , seja k o número de

lugares possíveis desse interseção. Observe que k é um número inteiro entre zero e $n - 2$. Devemos especificar todas as direções dos n elos, a partir do ponto de interseção indo no sentido anti-horário junto ao contorno. A direção do primeiro elo é norte, a direção de qualquer outro elo pode ser, no máximo dois valores distintos a direção do último elo é predeterminada pelos anteriores, pois o contorno tem que voltar a seu ponto inicial. O número de casos possíveis não excede 2^{n-2} . Logo

$$b_n \leq (n - 2) \times 2^{n-2}$$

conseqüentemente a probabilidade de percolação não pode ultrapassar

$$\sum_{n=6}^{\infty} (n - 2) \times 2^{n-2} \times (1 - \epsilon)^n$$

Para $(1 - \epsilon)$ suficientemente pequeno esta soma é menor que 1, pois

$$\begin{aligned} \sum_{n=6}^{\infty} (n - 2) \times 2^{n-2} \times (1 - \epsilon)^n &\leq \frac{1}{4} \sum_{n=6}^{\infty} n \times \delta^n \\ &= \frac{\delta}{4} \sum_{n=6}^{\infty} n \times \delta^{n-1} \\ &= \frac{\delta}{4} \left(\frac{1}{(1 - \delta)^2} - 1 - 2\delta - 3\delta^2 - 4\delta^3 - 5\delta^4 \right), \end{aligned}$$

onde $\delta = 2(1 - \epsilon)$.

A última expressão é certamente menor que 1 se $\delta < 0,6$, logo a probabilidade de percolação é positiva para $\epsilon > 0,7$. Isso conclui nossa tarefa.

Exemplo 3

Considere um grafo orientado G cuja representação no plano é um pedaço do papel quadriculado em forma de quadrado de lado n e α é o vértice do canto inferior esquerdo desse quadrado. Vamos representar os elos do grafo G por segmentos contínuos e os elos do grafo G' por segmentos tracejados.

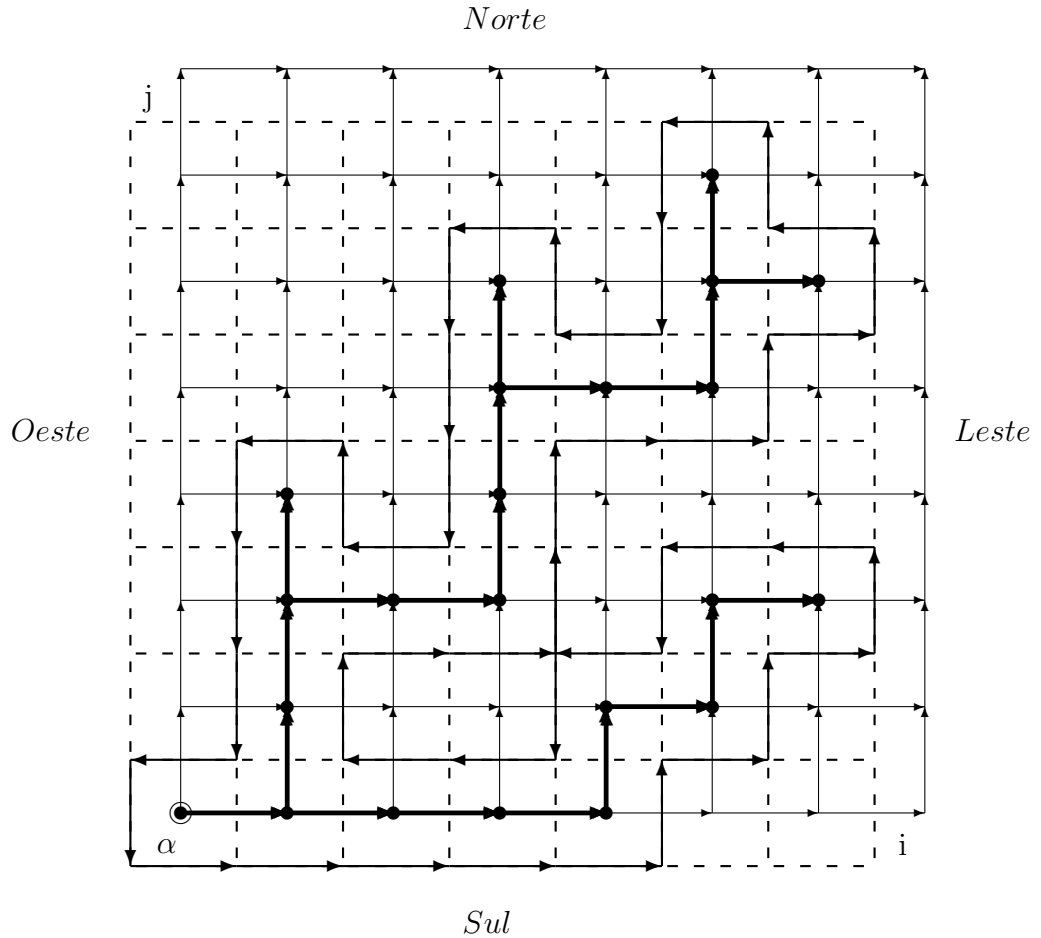


Figura 3 - O grafo G é um pedaço finito de tamanho $n \times n$ do papel quadriculado orientado. Neste caso um caminho só pode conter passos dirigidos para o leste ou o norte. Caminhos partindo de α são representados por setas.

Mostremos que quando $n \rightarrow \infty$, o limite da probabilidade de percolação é zero, se ϵ é bastante pequeno, mas a probabilidade de percolação é separada de zero se ϵ é suficientemente grande.

Como α encontra-se no canto inferior esquerdo do quadrado de lado n , então o menor caminho entre α e um ponto na periferia Leste ou Norte do quadrado tem n elos.

Considere, então, um caminho auto-evitando com k elos e que conecta α a um vértice na periferia Norte ou Leste de G . A probabilidade desse caminho está aberto é igual a ϵ^k . Para cada quadrado de lado n vamos denotar por a_k o número de caminhos com k elos que conecta α a um vértice na periferia Norte ou Leste do quadrado. Note que $a_k \leq 2^k$.

Então a probabilidade de haver percolação é a probabilidade de pelo menos um desses caminhos está aberto, ou seja:

$$P(\text{percolação}) \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k \epsilon^k \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^k \epsilon^k = \sum_{k=n}^{\infty} (2\epsilon)^k = \frac{(2\epsilon)^n}{1 - 2\epsilon}$$

que tende para zero quando $n \rightarrow \infty$ para todo $\epsilon < \frac{1}{2}$.

Vamos encontrar agora a probabilidade de não haver percolação. Pelo teorema 3 não existe percolação de α até um vértice na periferia Norte ou Leste do quadrado se existir um contorno no grafo G' isolando α desse conjunto. Um contorno com N elos na direção Norte e O elos na direção Oeste, está aberto com probabilidade $(1 - \epsilon)^{N+O}$. Observe que podemos desprezar os elos nas direções Leste e Sul, uma vez que todos eles estão abertos com probabilidade 1.

Para um quadrado de lado n , a interseção de um contorno com k elos no sentido Norte e Oeste e o eixo i pode ocorrer em n pontos diferentes do eixo i . O elo desse contorno que intercepta i tem o sentido Norte o último elo cuja probabilidade de está aberto é diferente de 1 tem o sentido oeste. Todos os outros elos tem três sentidos possíveis. Assim para um quadrado de lado n se k é o número de elos no sentido Norte e Oeste, pode existir um máximo de 3^{k-2} contornos distintos com k elos nesses sentidos. Seja a_k o número desses contornos com k elos no sentido Norte e Oeste. Então a probabilidade de não percolação quando $n \rightarrow \infty$ pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}
P(\text{n\~{a}o percola\~{c}o\~{a}o}) &= \sum_{k=2}^{\infty} b_k (1 - \epsilon)^k \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} (k - 1) \times 3^{k-2} (1 - \epsilon)^k \\
&\leq \frac{[3(1 - \epsilon)]^2}{9} \times \sum_{k=2}^{\infty} (k - 1) \times [3(1 - \epsilon)]^{k-2} \\
&= \frac{\delta^2}{9} \times \sum_{k=1}^{\infty} k \times \delta^{k-1} \\
&= \frac{\delta^2}{9} \times \sum_{k=1}^{\infty} k \times \delta^{k-1} \\
&= \frac{\delta^2}{9} \times \frac{1}{(1 - \delta)^2}
\end{aligned}$$

onde $\delta = 3(1 - \epsilon)$.

A \u00faltima express\u00e3o \u00e9 menor que $\frac{1}{2}$ se $\delta < 0,68$, o que \u00e9 certo se $\epsilon > 0,76$. Assim a probabilidade de percola\u00e7\u00e3o \u00e9 maior que $\frac{1}{2}$ se $\epsilon > 0,76$. Ou seja probabilidade de percola\u00e7\u00e3o \u00e9 separada de zero se $\epsilon > 0,76$. Como queriamos mostrar.

Exemplo 4

Considere o grafo G planar infinito e orientado cuja representa\u00e7\u00e3o no plano de G e seu dual G' tem a forma da figura 4. Cada elo de G est\u00e1 aberto na dire\u00e7\u00e3o indicada pela seta com probabilidade ϵ independentemente de qualquer outro elo, e sempre fechado na dire\u00e7\u00e3o oposta. G e G' satisfazem a regra (3) ver p\u00e1gina 12.

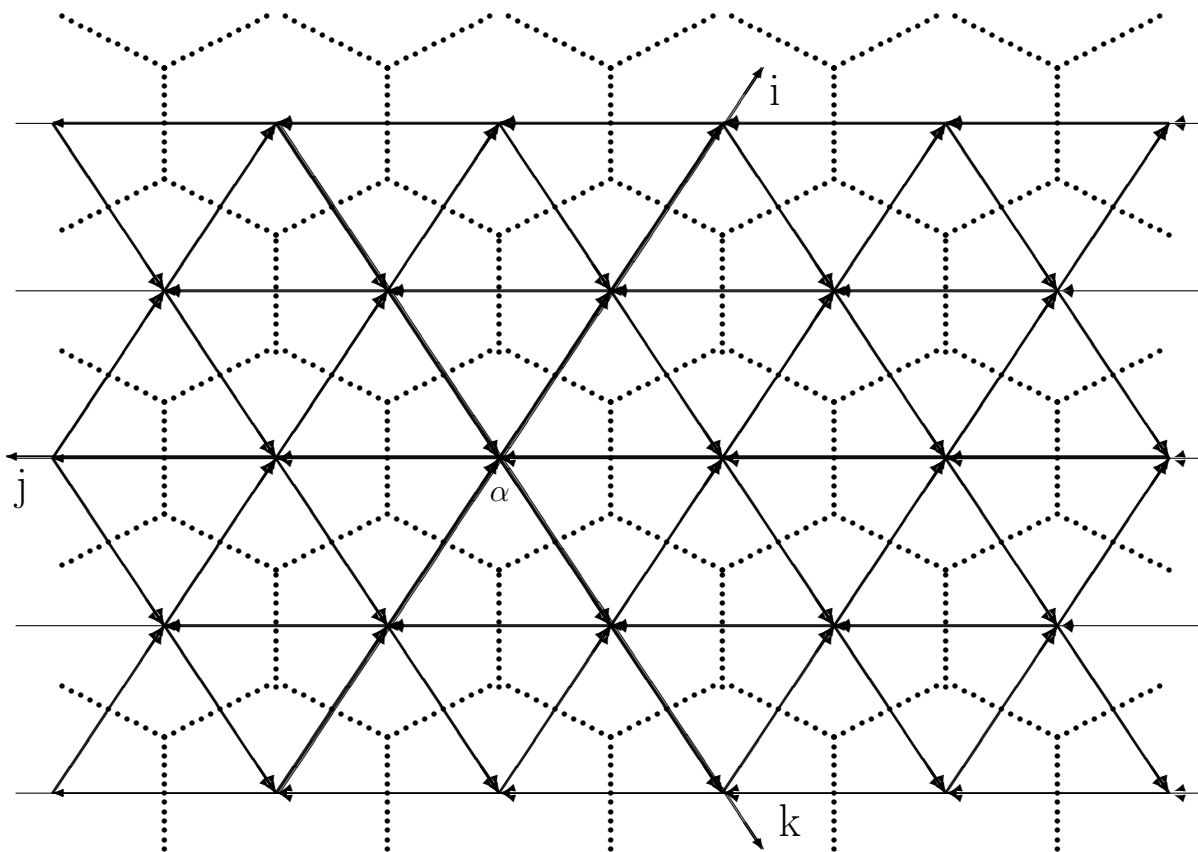


Figura 4 - Pedacos dos grafos G e G' . As linhas contínuas mostram o grafo G , representado por um reticulado triangular e as linhas pontilhadas mostram o grafo dual G' representado por um reticulado hexagonal. Os elos do grafo G estão abertos nas direções dos eixos i, j, k com probabilidade ϵ independentemente e estão sempre fechados nas direções opostas.

Vamos provar que percolação de α até ∞ no grafo G tem um valor crítico ϵ^* estritamente entre zero e um, tal que :

- a) - Se $\epsilon < \epsilon^*$, a probabilidade da percolação é zero;
- b) - Se $\epsilon > \epsilon^*$, a probabilidade de percolação é positiva.

Na realidade provaremos que:

- a') - Se ϵ for suficientemente pequeno, a probabilidade de percolação é zero;
- b') - Se ϵ for suficientemente grande, a probabilidade de percolação é positiva.

Isto é suficiente para provar a existência do valor crítico, pois podemos definir ϵ^* como sendo o supremo desses valores de ϵ , para o qual a probabilidade de percolação é zero.

Queremos estimar a probabilidade de existência de um caminho aberto nas direções da seta, infinito e partindo de α . Se existe percolação de α até ∞ , então para todo n inteiro positivo existe pelo menos um caminho aberto de comprimento n iniciando em α . Como ϵ é a probabilidade de cada elo nesse caminho está aberto, como existem n elos nesse caminho, então a probabilidade de todos eles estarem abertos é exatamente ϵ^n . O número de caminhos possíveis de comprimento n iniciando em α não supera 3^n . Logo a probabilidade de existir um caminho aberto de comprimento n iniciando em α não supera $(3\epsilon)^n$. Esse valor converge para zero quando $n \rightarrow \infty$ sempre que $\epsilon < \frac{1}{3}$. Isso prova a').

A prova de b') não é tão fácil mas aplicando o nosso teorema 4 da página 13 o reduzimos. No lugar de encontrar qual a probabilidade de não existir um caminho infinito e aberto no grafo G , vamos encontrar a probabilidade de existir um contorno no grafo G' aberto no sentido anti-horário e cercando α . Contorno esse que chamaremos de *viável*. O menor contorno em G' contém seis elos.

Observe que todos os países do grafo G podem ser classificados em duas classes: \triangle e ∇ e países vizinhos sempre pertencem a classes diferentes. Logo todos os vértices do grafo G' podem ser classificados em duas classes tal que cada elo conecta um vértice da primeira classe com um vértice da segunda classe e a probabilidade de está aberto é 1 na direção da primeira classe para a segunda é $(1 - \epsilon)$ de volta. Logo em cada contorno a metade dos elos tem probabilidade $(1 - \epsilon)$ de ser aberto e a outra metade tem probabilidade 1 de ser aberto na direção exigida. Logo cada contorno tem um número par de elos. Seja $2k$ o número de elos num contorno. Então a probabilidade desse contorno está aberto é igual a $(1 - \epsilon)^k$.

Assim a probabilidade de existir pelo menos um contorno viável no grafo G' pode ser expressa da seguinte forma:

$$\sum_{k=3}^{\infty} b_k \times (1 - \epsilon)^k$$

onde os b_k indicam o número de contornos distintos com $2k$ elos que cercam α .

Vamos estimar os valores dos b_k . Considere a interseção mais a esquerda desse contorno com a parte positiva do eixo i quando o percorrermos no sentido anti-horário. Um contorno com $2k$ elos pode ter essa interseção em $k - 1$ elos distintos de G . A direção desse elo é *Norte*. A direção de todos os outros elos pode assumir dois valores distintos. O último elo tem a direção pré-determinada pelos os que antecedem, pois o contorno deve voltar ao lugar de origem. Assim existem não mais que $(k - 1) \times 2^{k-2}$ contornos distintos com $2k$ elos.

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{\infty} b_{2k} \times (1 - \epsilon)^k &\leq \sum_{k=3}^{\infty} (k - 1) \times 2^{k-2} \times (1 - \epsilon)^k \\ &= \left(\frac{[2(1 - \epsilon)]^2}{4} \right) \times \sum_{k=3}^{\infty} (k - 1) \times [2(1 - \epsilon)]^{k-2} \\ &= \frac{\delta^2}{4} \sum_{s=2}^{\infty} s \times \delta^{s-1} = \frac{\delta^2}{4} \times \left(\frac{1}{(1 - \delta)^2} - 1 \right), \end{aligned}$$

onde $\delta = 2(1 - \epsilon)$.

A última expressão é menor que 1 se $\delta < 0,58$. Logo a probabilidade de percolação é certamente positiva se $\epsilon > 0,71$.

Exemplo 5 (O Processo de Stavskaya [11])

Vamos mostrar que nossos teoremas podem ser aplicados não somente em percolação, mas também em autômatos celulares.

Inicialmente vamos definir uma classe de autômatos celulares sobre a qual falaremos. O espaço onde estão os componentes é \mathbb{Z} . Nós imaginamos que todo ponto $i \in \mathbb{Z}$ pode ou está no estado zero (vazio) ou no estado 1 (conter uma partícula). Então o espaço configuracional é $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ e o tempo é discreto.

Assumimos que nossas partículas têm duas funções básicas dos seres vivos: reprodução e morte e faça-os reproduzir deterministicamente e morrer aleatoriamente. Assim em cada passo do tempo discreto duas transformações ocorrem: primeiro reprodução determinística de D , então morte aleatória de R_δ , onde $\delta \in [0, 1]$.

Após a ação de D toda partícula que está em algum ponto v , gera outra partícula no ponto $v - 1$ a menos que este ponto já esteja ocupado.

Agora definiremos R_δ , morte aleatória. Após a sua ação, toda partícula morre (1 torna-se 0) com probabilidade δ independentemente do que acontece com outras partículas. Assim $\delta \in [0, 1]$, chamado *taxa de mortalidade*, é o único parâmetro.

Em [1] foi provado que existe um valor crítico não-trivial $\delta^* \in (0, 1)$ tal que :

- a) - Se $\delta > \delta^*$, as partículas morrem completamente para qualquer condição inicial;
- b) - Se $\delta < \delta^*$ e inicialmente todo o espaço está cheio de partículas, essas não morrem completamente.

De fato provaremos

- a') - Quando δ for suficientemente grande, as partículas morrem completamente;
- b') - Se δ é suficientemente pequeno e inicialmente todo o espaço estavam com partículas, essas não morrem completamente.

Antes de provar nossas afirmações note que nosso processo pode ser representado usando a percolação orientada. Consideremos o *grafo de percolação* com vértices denotados (v, t) , onde $v \in \mathbb{Z}$ e $t = 0, 1, 2, 3, \dots$. Os elos de todo vértice (v, t) vão para os vértices $(v, t + 1), (v - 1, t + 1)$. Todo elo está aberto na direção de sua orientação e fechado na direção oposta. Também assumiremos que todo vértice pode estar aberto ou fechado. Todos os vértices iniciais $(v, 0)$ estão abertos (isto significa que a condição inicial é “todos uns”), todos os outros vértices estão fechados com probabilidade δ e abertos com probabilidade $1 - \delta$ independentemente uns dos outro. Um caminho é definido como no capítulo 1 e está aberto se todos os seus vértices estão abertos e todos os seus elos estão abertos na direção usada.

É claro que há uma partícula em um ponto v no tempo t se e somente se, há um caminho aberto de algum vértice inicial para o vértice (v, t) no grafo de percolação.

Provemos a afirmação a’). Para isso vamos mostrar que se $\delta > 1/2$, todas as partículas morrem quando $t \rightarrow \infty$. Notamos que para qualquer caminho de qualquer vértice inicial para um vértice (v, t) a probabilidade que esteja aberto é $(1 - \delta)^t$ e existem 2^t , tais caminhos. Então a probabilidade que exista uma partícula em um certo ponto, no tempo t não excede

$$(1 - \delta)^t \cdot 2^t = ((1 - \delta)2)^t.$$

Se $\delta > 1/2$, esta quantidade tende a zerar quando $t \rightarrow \infty$, por isso as partículas morrem. Isto prova a afirmação a’). Definiremos δ^* como o ínfimo desses δ , para o qual as partículas morrem, qualquer que seja a condição inicial. Então $\delta^* \leq 1/2$.

Para provar a afirmação b’) transformamos percolação nos vértices em percolação nos elos, a saber, transformamos o grafo de percolação do seguinte modo:

Esticamos cada vértice transformando-o em um elo, que é aberto com a probabilidade $1 - \delta$ e fechado com probabilidade δ . Assim obtemos percolação nos elos e por isso podemos aplicar nosso teorema 3.

Introduziremos um vértice especial α , conectado por elos com s_0, s_1, s_2, s_3 . É conveniente assumir que estes elos sempre estão abertas em ambas as direções - então os elos duais sempre serão fechadas em ambas as direções e nós nem mesmo precisaremos desenhá-las.

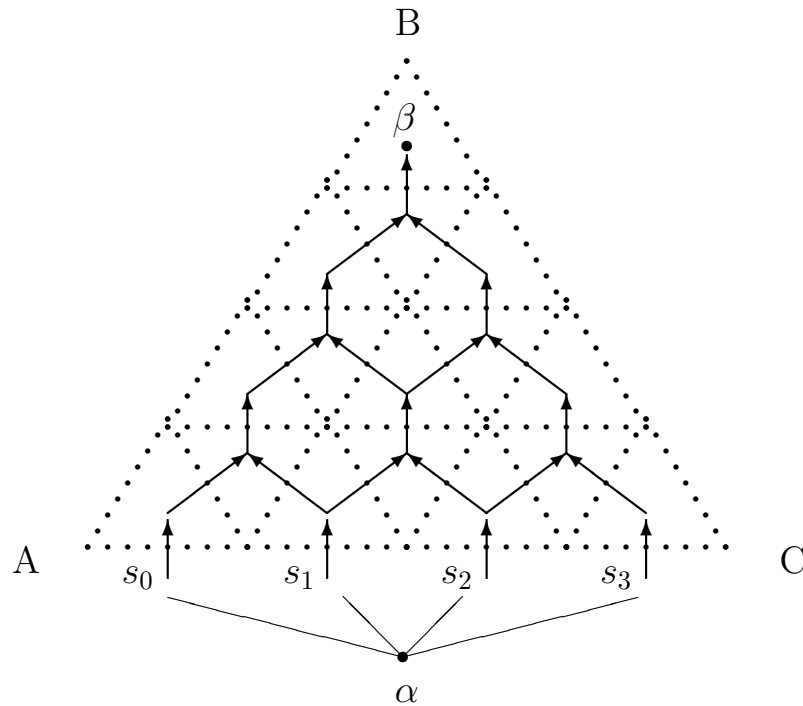


Figura 5 - Processo de Stavskaya como percolação de elo. A presença de uma partícula no ponto $(0, 3)$ equivale a percolação no grafo G apresentado por linhas contínuas da fonte α para o objetivo β . Linhas pontilhadas mostram o grafo dual G' . Os lados AB e BC correspondem a um vértice de G' .

Então, há uma partícula no ponto v no tempo t se há percolação de α até β no grafo G ilustrado com linhas contínuas na figura 5.

As setas inclinadas deste grafo sempre estão abertas, mas as setas verticais podem estar abertas ou fechadas, porque elas imitam nosso operador aleatório: cada uma delas está fechada com probabilidade δ e aberta com probabilidade $1 - \delta$. Assim nós reduzimos um problema sobre nosso processo aleatório para um problema sobre percolação.

Também é conveniente assumir que os elos verticais do grafo G sempre estão abertos para baixo;

isti não cria nenhuma oportunidade indesejada de percolação porque os elos inclinados sempre estão fechados para baixo. Então, de acordo com a regra (3), os elos do grafo dual G' (apresentado por linhas pontilhadas) está aberto como segue: os elos direcionados \swarrow e \nwarrow estão sempre abertos nestas direções e sempre estão fechadas nas direções opostas; os elos direcionados \rightarrow estão abertos nesta direção com probabilidade δ e sempre estão fechados na direção oposta.

De acordo com o teorema 3, não há percolação de α até β no grafo original G se há um contorno aberto em G' cercando β , mas não α , e indo no sentido anti-horário. Logo concentremos nossa atenção no grafo G' apresentado na figura 5 com linhas pontilhadas. Podemos assumir que todo contorno começa e termina no ponto mais alto B . A probabilidade de que exista tal contorno não excede

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \delta^k,$$

onde C_k é o número de tais contornos que estão tendo k passos horizontais. Todo contorno tem números de passos iguais em todas as três direções, dessa forma tem $3k$ passos. Como cada passo de um contorno tem somente três possíveis direções, $C_k \leq 3^{3k}$ e então a probabilidade que exista uma partícula no local 0 num tempo qualquer não excede

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^{3k} \cdot \delta^k = \frac{27\delta}{1 - 27\delta},$$

que é menor que um, assim que $\delta < 1/54$. Dessa forma, sempre que $\delta < 1/54$, as partículas não morrem porque as suas densidades não tendem a zerar.

Referências

- [1] Andrei Toom
A Family of Uniform nets of Formal Neurons
Soviet Math. Dokl. Vol.9 (1968) pp. 1338-1341
- [2] Andrei Toom
Contornos, conjuntos convexos e autômatas celulares
Curso ministrado no 23^o Colóquio Brasileiro de Matemática (IMPA)
Rio de Janeiro-RJ-Brasil
- [3] Discrete local Markov systems. A. Toom, N. Vasilyev, O. Stavskaya, L. Mityushin, G. Kurdyumov and S. Pirogov. *Stochastic Cellular Systems : ergodicity, memory, morphogenesis*. Ed. by R. Dobrushin, V. Kryukov and A. Toom. Nonlinear Science: theory and applications, Manchester University Press, 1990, pp. 1-182.
- [4] Geoffrey Grimmett.
Percolation.
Springer, 1999.
- [5] Harry Kesten.
Percolation theory for mathematicians.
Birkhäuser, 1982.
- [6] Hassler Whitney
Planar Graphs
Fund. Math 21, pp. 73-84 (1933),
Cambridge, U.S.A.
- [7] Hassler Whitney
Non-Separable and Planar Graphs
Trans. Amer. Math. Soc., 34 pp. 339-362
Cambridge, U.S.A.
- [8] James Dugundji
Topology
University of Southern California
Los Angeles, U.S.A. (1966)
- [9] J.M.Hammersley
Percolation process,
Proc Cambr. Phil. Soc., 53. pp. 629-641, 642-645 (1957)
- [10] J.M.Hammersley
Bornes Supérieures de la probabilité critique das un processus de filtration
Le calcul dos probabilités et ses application, pp. 17-37.
- [11] Olga Stavskaya and Ilya Piatetski-Shapiro. On homogeneous nets of spontaneously active elements. *Systems Theory Res.*, v. 20 (1971), pp. 75-88. Originally this article was published in Russian in 1968.
- [12] S.R.Broadbent.
In discussion of Symposium on Monte-Carlo methods.
J. Roy. Statist. Soc. B, pp. 16-68 (1954)