LEI DOS GRANDES NÚMEROS NA PERCOLAÇÃO MULTI-DIMENSIONAL

MURILO DE MEDEIROS SAMPAIO

Orientador: Prof. Ph.D. Andrei Toom

Área de Concentração: Probabilidade

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco.

Recife, fevereiro de 2007

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Estatística

23 de fevereiro de 2007
(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Murilo de Medeiros Sampaio

intitulada

Lei dos Grandes Números na Percolação Multidimensional

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

Klaus Leite Pinto Vasconcellos
Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

A Toom
André Toom orientador

Serguei Popov
Serguei Popov (USP)

Klaus Leite Pinto Vasconcellos
Klaus Leite Pinto Vasconcellos

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

à *Maria das Neves* e *Nélio,*

que são os meus pais amados :)

Agradecimentos

A minha família, por tudo que sempre fizeram por mim. Em especial aos meus amados pais, *Nélio* e *Maria das Neves* agradeço a minha formação pessoal e um agradecimento especial pela valiosa contribuição financeira indispensável para a realização de meus estudos;

Ao professor Andrei Toom pela ajuda em todas as horas, confiança, seriedade e segurança no desenvolvimento desse trabalho, além da importante contribuição para o meu crescimento acadêmico e da dedicação como me conduziu na orientação desse trabalho;

Aos professores do departamento de Estatística, em especial, *Francisco Cribari Neto, Andrei Toom, Cristiano Ferraz, Klaus Leite Pinto Vasconcellos, Cláudia Regina O. de P. Lima* pela paciência, boa vontade, estímulo e pela a gama de conhecimentos transmitidos e adquiridos por mim;

Aos meus outros professores, aos de *graduação da UEFS* e aos do *colegial no Assis,* que atualmente estão mais distantes mas não são, nem foram, menos importantes pois sem eles jamais teria chegado aqui e terminado este trabalho;

À secretária da pós-graduação em estatística *Valéria Bittencourt* e ao técnico em informática *Candido* pela atenciosidade;

Aos meus colegas de mestrado, pela convivência, paciência e harmonia;

A meus amigos e amigas extras ao curso pela constante amizade, e um especial agradecimento à *Andréia V.Rocha* pela paciência e atenciosidade;

Ao CNPQ pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho;

E por último e não menos importante, a Deus.

Resumo

Nesta dissertação nós estudamos um processo multi-dimensional com interação local, que é essencialmente um exemplo de percolação orientada com qualquer dimensão natural mais que um. Nosso resultado principal, o teorema 2, é uma generalização da Lei dos Grandes Números (LGN) para conjuntos finitos arbitrários das componentes deste processo. Desde que nossas componentes são colocadas em um espaço multi-dimensional, não há maneira preferível de ordená-la em uma seqüência. Assim, anunciamos e provamos um análogo multi-dimensional da LGN para todos os conjuntos finitos das componentes. Este resultado é baseado em um outro, o teorema 1, a saber um decrescimento exponencial da correlação entre componentes quando a distância entre eles tender à infinidade.
Palavras-chave: Percolação Orientada, Lei dos Grandes Números.

Abstract

In this dissertation we study a multi-dimensional process with local interaction, which essentially is a case of oriented percolation with any natural dimension greater than one. Our main result, theorem 2, is a generalization of the Law of Large Numbers (LLN) for arbitrary finite sets of components of this process. Since our components are placed in a multi-dimensional space, there is no preferable way to order them in a sequence, so we state and prove a multi-dimensional analog of the LLN for all finite sets of components. This result is based on another one, theorem 1, namely an exponential decay of correlation between components when the distance between them tends to infinity.

Key Words: Oriented Percolation, Law of Large Numbers.

Índice

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação

A Lei dos Grandes Números é o princípio geral das ciências de observação, segundo a qual a freqüência de determinados acontecimentos, observados em um grande número de casos análogos, tende a se estabilizar cada vez mais, à medida que aumenta o número de casos observados, aproximando-se do valor previsto pela teoria das probabilidades.

Historicamente, o conceito de percolação surge do estudo do fenômeno de transporte de um fluido através de um meio poroso. Por exemplo, o petróleo através de uma rocha, ou a água em um filtro de areia. Formulado no final da década de 50 por Broadbent e Hammersley [5], o modelo de percolação concentra-se em descrever o meio poroso, que será visto como uma rede de canais aleatórios, por onde escoa um fluido determinístico.

A percolação é uma parte da teoria da probabilidade moderna que tem recebido muita atenção nas últimas décadas. Os modelos de percolação encontram aplicação em várias situações físicas de interesse tais como o problema da mecânica estatística de sistemas ferromagnéticos diluídos, no problema do transporte de corrente elétrica através de uma rede composta por um grande número de resistores, em problemas de prospecção de petróleo e até mesmo na propagação de epidemias e de incêndios em bosques.

O processo de contato é um sistema de partículas interagentes que pode ser interpretado como um modelo para descrever o espalhamento de uma infecção. Neste contexto, cada ponto de uma rede d-dimensional representa um indivíduo que pode estar infectado ou saudável, assumi valor 1 e 0 respectivamente. O sistema evolui segundo uma dinâmica estocástica, que consiste dos eventos elementares de infecção e recuperação. (Uma definição mais precisa do modelo se encontra na próxima seção.) A infecção se espalha através do contato direto entre indivíduos infectados e saudáveis. O espalhamento da infecção depende de um parâmetro de infecção que chamaremos de θ. Indivíduos infectados se recuperam com uma taxa unitária e são suscetíveis a re-infecção. Como um indivíduo deve ter pelo menos um vizinho doente para tornar-se infectado, o estado no qual todos os indivíduos são saudáveis é absorvente: o sistema não pode escapar desta configuração! Neste contexto, o estado absorvente representa o fim da epidemia.

A persistência da epidemia é controlada pelo parâmetro de infecção. Se θ é muito pequeno, a extinção da infecção em tempos longos é certa; por outro lado, grandes valores de θ asseguram que a infecção pode espalhar indefinidamente. A fronteira entre persistência e extinção é marcada por um ponto crítico. O parâmetro crítico separa os dois estados estacionários que o sistema pode atingir em tempos longos: um estado livre de doenças (absorvente), e um estado "ativo" onde a epidemia sobrevive. Este parâmetro crítico marca uma transição de fase contínua entre um estado absorvente e um estado ativo.

Neste primeiro capítulo apresentaremos um processo que é de fato um caso de percolação orientada multi-dimensional e enunciaremos dois teoremas sobre esse processo; um deles é sobre a quasi-independência e o outro teorema é um análogo da Lei dos Grandes Números. No segundo capítulo enunciaremos e provaremos algumas propriedades em percolação que serão úteis nas demonstrações dos teoremas. No terceiro capítulo demonstraremos o primeiro teorema com respeito à quasi-independência dos pontos do processo, isto é, quanto maior a distância entre dois pontos do processo tão menor é a covariância entre eles. O quarto capítulo diz respeito à prova do segundo teorema; este se relaciona com a Lei dos Grandes Números. No Apêndice A provamos um lema que diz respeito à soma de uma série usada na demonstração do teorema 2.

1.2 Descrição do Processo

Consideraremos o espaço d-dimensional discreto $\mathbb{Z}^d$; cada elemento deste espaço chamamos de *vetor inteiro*, o qual possui d componentes pertencentes a $\mathbb{Z}$. Para cada $i = 1, \ldots, d$ denotaremos por e_i o vetor cuja i-ésima componente é um e as demais componentes são zeros. Os vetores $e_1, \ldots, e_d$ são chamados de *canônicos.* Usaremos a *norma*

$$\|v\| = \max_{i=1,\ldots,d} |v_i|\,,$$

e para todos os pontos v, w definimos *distância* entre eles como

$$dist\,(v,w) = \|v-w\| = \max_{i=1,\ldots,d} |v_i - w_i|\,. \tag{1.1}$$

Denotamos

$$V = \{v \in \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^{d} v_i \geq 0\}.$$

Cada elemento de V é chamado de *ponto.* Cada função de V em $\{0,1\}$ chamamos de *configuração.* Assim o *espaço configuracional* que consideraremos é $\Omega = \{0,1\}^V$. Cada configuração x tem componentes $x_v \in \{0,1\}$ para todo $v \in V$.

Para cada ponto $v \in V$ temos a *variável aleatória auxiliar* a_v que é independente das outras variáveis aleatórias auxiliares e toma valores

$$a_v = \begin{cases} 0 & \text{com probabilidade } \theta, \\ 1 & \text{com probabilidade } 1-\theta. \end{cases}$$

Logo temos uma medida produto μ para as variáveis a_v.

Vamos definir um mapa f de Ω para Ω. Denotaremos por a o argumento do mapa f e de x o valor dele. Este mapa transforma cada configuração a de variáveis auxiliares em uma configuração $x = f(a) \in \Omega$ pela indução:

Base de indução:

se $v_1 + \ldots + v_d = 0,$ então

$$x_v = a_v.$$

Passo de indução:

se $v_1 + \ldots + v_d > 0,$ então

$$x_v = \min(\max(x_{v-e_1}, \ldots, x_{v-e_d}), a_v). \tag{1.2}$$

Este mapa f de Ω para Ω define uma distribuição em Ω induzida pela medida μ em $\{0,1\}^V$. Esta distribuição é o processo qual iremos estudar. E é claro que este processo definido assim é um tipo de percolação.

Podemos interpretar o processo como segue: Consideraremos um sistema de pontos que possuem duas funções básicas dos seres vivos, a saber, reprodução e morte. Dizemos que um ponto está *vivo* se $x_v = 1$; do contrário, diremos que o ponto está *morto*.

Para cada $t \geq 0$, definimos

$$V_t = \{v \in V : v_1 + \ldots + v_d = t\}. \tag{1.3}$$

Cada ponto em V_{t+1} está relacionada a d pontos em V_t.

- Se estes d pontos de V_t estiverem mortos, o ponto em V_{t+1} que os relaciona estará também morto.

- Se existe ao menos um destes d pontos de V_t vivo, o ponto em V_{t+1} que os relaciona poderá estar também vivo com uma probabilidade $1-\theta$.

Por isso chamaremos θ de *parâmetro de mortalidade* do processo.

Como na física estatística, aqui também teremos dois comportamentos distintos para o processo: um deles quando $d=1$ e outro quando $d>1$.

Para dimensão $d=1$, temos um único ponto em cada V_{t+1} e este está relacionado a um único ponto de V_t; assim, se o ponto em V_t estiver morto, o ponto em V_{t+1} também estará; do contrário ele pode estar vivo com probabilidade $1-\theta$. É um fato bem conhecido que neste caso os pontos acabam mortos quando $t \to \infty$.

Seja x e y duas configurações,isto é, elementos de Ω. Dizemos que $x \prec y$ se $\forall v \in V:\ x_v \leq y_y$. Dizemos que uma função $h:\Omega \to \Omega$ é monótona se

$$x \prec y \Rightarrow h(x) \prec h(y).$$

Para dimensão $d=2$, está provado que

$$\exists C>0: \text{ para cada } \theta \in (0,C), \forall v \in V,\ \mu(x_v=1) \geq const > 0,$$

e esta prova pode ser encontrada na referência [6].

Podemos baseado no caso $d=2$ provar o mesmo para dimensões maiores utilizando a monotonicidade do mapa f de Ω para Ω, que de fato é monótono, pois é definido usando composições de funções monótonas em (1.2).

Assim durante todo o nosso estudo utilizaremos apenas dimensão $d>1$.

1.3 Enunciados dos Teoremas Principais

O primeiro teorema que iremos demonstrar se refere à covariância entre pontos do processo, de forma que quanto maior é a distância entre os pontos, tanto menor é a covariância entre eles.

Para cada $d \geq 2$, definimos

$$\Theta_d = (3^{d+1})^{-2\times(1+d\times 4^d)}. \tag{1.4}$$

Teorema 1 (Quasi-Independência). *Para cada dimensão $d \geq 2$ e parâmetro de mortalidade $\theta \in (0, \Theta_d)$, existem constantes positivas p e q com $q < 1$, tais que para todos $v, s \in V$,*

$$|\mathrm{Cov}(x_v, x_s)| \leq p \times q^{\|v-s\|}.$$

Depois mostraremos como o maior resultado que uma forma análoga da Lei dos Grandes Números será válida para o processo.

Teorema 2 (Lei dos Grandes Números). *Para cada dimensão $d \geq 2$, parâmetro de mortalidade $\theta \in (0, \Theta_d)$ e $\epsilon > 0$, existe uma constante R tal que para todos n pontos distintos $v^1, \ldots, v^n \in V$,*

$$\mathrm{Prob}\left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{v^i} - \mathrm{E}x_{v^i})}{n} \right| > \epsilon \right) \leq \frac{R}{n}$$

onde E *é a esperança.*

Capítulo 2

Noções da Teoria de Percolação

Para provar nossos teoremas usaremos algumas idéias sobre percolação. Assim neste capítulo definiremos alguns conceitos relacionados a percolação e enunciaremos e provaremos lemas menores.

Definição 1. *Dados dois pontos $v, s \in V$, dizemos que o ponto s é **receptor** de v, ou v é **emissor** de s se $\exists k \in \{1, \ldots, d\} : s = v + e_k$.*

Então para cada ponto em V temos que ele possui d pontos receptores, e também, possui d pontos emissores se $v_1 + \ldots + v_d > 0$ e nenhum ponto emissor se $v_1 + \ldots + v_d = 0$. Consideraremos que para cada ponto v de V existem elos cuja extremidade inicial é v e extremidade final está em cada ponto receptor de v. Denotaremos o conjunto de todos os elos por E.

Definição 2. *Chamamos de* **grafo orientado** *G o grafo com o conjunto de vértices V e conjunto de elos E.*

2.1 Conjunto de Influência

Utilizaremos o grafo G descrito anteriormente nas demonstrações a seguir neste capítulo.

Definição 3. *Dados dois pontos* $v, s \in V$, *um **caminho de** s **para** v é uma seqüência* $s - elo - ponto - elo - ponto - \ldots - ponto - elo - v$ *onde cada elo conduz de um ponto a um ponto receptor.*

Definição 4. *Dados dois pontos* $s, v \in V$, *dizemos que s **precede** v ou v **sucede** s, e escrevemos* $s \prec v$, *se para todo* $i \in \{1, \ldots, d\}$, $s_i \leq v_i$.

Caso contrário dizemos que s *não precede* v e escrevemos $s \nprec v$.

Lema 1. *Dados dois pontos* $v, s \in V$, *existe caminho de s para v se e somente se* $s \prec v$.

Demonstração: Chamaremos de *conjunto dos emissores* de um ponto v o seguinte conjunto

$$Emissor(v) = \{w \in V,\ \exists k \in \{1, \ldots, d\} : w = v - e_k\}.$$

Supondo que exista um caminho de s para v, então existe uma seqüência de pontos $v = v_0, v_1, \ldots, v_m = s$, onde para cada $k > 0,\ v_k \in Emissor\,(v_{k-1})$. Mas se existir $w \in Emissor(v)$ temos que $w \prec v$, pois se $w \in Emissor(v)$ então $w = v - e_k$, para algum $k = \{\ 1, \ldots, d\}$, logo $w_i \leq v_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$. Logo para cada $k > 0,\ v_k \prec v_{k-1}$, assim $s \prec \ldots \prec v_1 \prec v$. Portanto $s \prec v$.

Por outro lado, se $s \prec v$, isto é, para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$, $s_i \leq v_i$, então podemos criar um caminho de s para v, definido por d partes. Primeiramente considere estes pontos $w\,[0] = v$, e para $i = 1, \ldots, d$,

$$w\,[i] = w[i-1] - (v_i - s_i)\, e_i.$$

Denotaremos por $cam(w[1], v)$ um caminho do ponto $w[1]$ até o ponto v. Cada parte do caminho é obtida utilizando os seguinte pontos:

$$
\begin{aligned}
cam(w[1],v) &\Leftrightarrow \quad v, v-e_1, v-2e_1, \ldots, v-(v_1-s_1)\,e_1 = w\,[1] \\
cam(w[2],w[1]) &\Leftrightarrow \quad w\,[1]\,, w\,[1]-e_2, w\,[1]-2e_2, \ldots, w\,[1]-(v_2-s_2)\,e_2 = w\,[2] \\
cam(w[3],w[2]) &\Leftrightarrow \quad w\,[2]\,, w\,[2]-e_3, w\,[2]-2e_3, \ldots, w\,[2]-(v_3-s_3)\,e_3 = w\,[3] \\
&\vdots \\
cam(w[d],w[d-1]) &\Leftrightarrow \quad w\,[d-1]\,, w\,[d-1]-e_d, w\,[d-1]-2e_d, \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots, w\,[d-1]-(v_d-s_d)\,e_d = w\,[d]\,.
\end{aligned}
$$

Assim temos um caminho de $w\,[d]$ para v, agora note que:

$$
\begin{aligned}
w\,[d] &= v-(v_1-s_1)\,e_1-(v_2-s_2)\,e_2 \ldots -(v_{d-1}-s_{d-1})\,e_{d-1}-(v_d-s_d)\,e_d \\
&= v-(v_1e_1-s_1e_1)-(v_2e_2-s_2e_2)\ldots-(v_{d-1}e_{d-1}-s_{d-1}e_{d-1})-(v_de_d-s_de_d) \\
&= v-(v_1e_1+v_2e_2+\ldots+v_{d-1}e_{d-1}+v_de_d)+ \\
&\qquad\qquad +(s_1e_1+s_2e_2+\ldots+s_{d-1}e_{d-1}+s_de_d) \\
&= v-v+s=s.
\end{aligned}
$$

Portanto existe um caminho de s para v.

Assim o lema 1 está provado.

Assim, o lema 1 nos diz que só existe caminho conduzindo de um ponto s ao ponto v se s preceder v; então, dado um ponto v, podemos formar um conjunto de todos pontos que são possíveis conduzir por um caminho até v.

Definição 5. *Para cada ponto $v \in V$ formamos um conjunto* $\mathrm{Inf}\,(v)$ *o qual denominaremos **conjunto de influência do ponto** v, definido pelos pontos que precedem o ponto v, isto é,*

$$\mathrm{Inf}\,(v) = \{w \in V : \; w \prec v\}\,.$$

Definição 6. *Dado qualquer ponto $v \in V$ e um número natural m, considere o subconjunto denominado **conjunto de influência próximo,***

$$\mathrm{Inf}\,(v,m) = \{w \in V : w \prec v,\; dist(w,v) \leq m\}\,,$$

onde *dist* está definida na expressão (1.1).

Lema 2. *Para todos os pontos distintos* $v, s \in V$ *e todos os* $m < dist(s, v)$, *os conjuntos* $\text{Inf}\,(s, m)$ *e* $\text{Inf}\,(v, m)$ *não têm pontos em comum.*

Demonstração: Tomaremos $r \in \text{Inf}\,(v, m)$ então

$$\forall i \in \{1, \dots, d\} : v_i - m \leq r_i \leq v_i.$$

Lembrando que se $m < \|s - v\| = \max\limits_{j=1,\dots,d} |s_j - v_j|$ então temos

$$\exists j \in \{1, \dots, d\} : m < |s_j - v_j|$$

- Se $s_j > v_j$ então $s_j > v_j + m \geq r_j + m$ assim $r_j < s_j - m$.
- Se $s_j < v_j$ temos $s_j < v_j - m \leq r_j$, assim $r_j > s_j$.

Portanto, temos que $r_j < s_j - m$ ou $r_j > s_j$, logo $r \notin \text{Inf}\,(s, m)$.
Analogamente se $r \in \text{Inf}\,(s, m)$ então $r \notin \text{Inf}\,(v, m)$.
Assim o lema 2 está provado.

2.2 Barreiras

Para cada ponto v em V, dizemos que este ponto é *aberto* se $a_v = 1$, e é *fechado* se $a_v = 0$. Dizemos que um *caminho é aberto*, quando todos os seus pontos são abertos.

Definição 7. *Para cada* $s \in V$ *dizemos que* s *é um* ***ponto doador de*** v *se existe um caminho aberto de* s *para* v.

Definição 8. *Para cada* $S \subset V$ *diremos que* S *é um* ***conjunto doador de*** v *se existe um caminho aberto de pelo menos um ponto de* S *para* v.

Dados um conjunto $B \subset V$ e um ponto $v \in V$ nos denotamos $W(v \mid B)$ o conjunto dos pontos doadores de v se B é o conjunto de pontos fechados. Diremos que B é uma *v-barreira para um ponto* $s \in V$ se $s \notin W(v \mid B)$. Diremos que B uma *v-barreira para um conjunto* $S \subset V$ se $S \cap W(v \mid B) = \emptyset$.

Chamamos de $Fonte$ o conjunto V_0, caso particular de V_t com $t = 0$,

$$Fonte = \left\{ v \in V : \sum_{i=1}^{d} v_i = 0 \right\}. \tag{2.1}$$

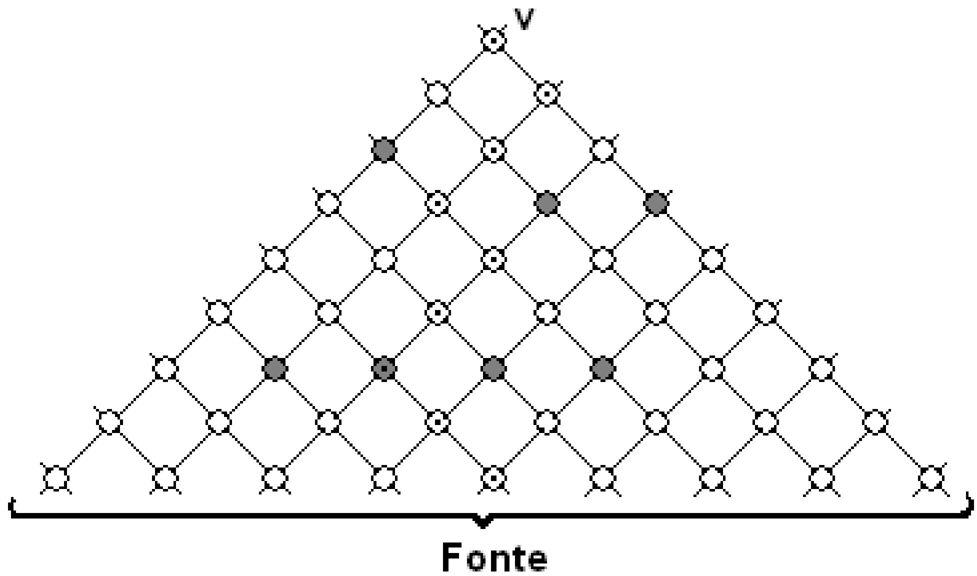
Definição 9. *Diremos que um conjunto B é uma v-**barreira,** se B for uma v-barreira para a $Fonte$.*

Definição 10. *Uma v-barreira será chamada de v-**barreira minimal** se todos os seus subconjuntos próprios não forem uma v-barreira.*

A figura 2.1, ilustra um exemplo de uma v-barreiras minimal e um caminho da $Fonte$ até o ponto v, quando consideremos a dimensão d igual 2. Destacamos os seguintes pontos:

- O ponto mais acima no triângulo é o ponto v.
- Os pontos da base do triângulo fazem parte da $Fonte$.
- Os pontos em cinza fazem uma v-barreira minimal.
- Os pontos que possuem uma marca dentro fazem um caminho da Fonte até o ponto v.

Figura 2.1: Figura de uma v-barreira e um caminho da $Fonte$ até v quando d=2.



Lema 3. *Cada v-barreira minimal é subconjunto de* $\mathrm{Inf}\,(v)$.

Demonstração: Suponhamos que exista um ponto b pertencente a v-barreira minimal B_v que não está no conjunto de influência, isto é, $b \not\prec v$. Pelo lema 1 não existe caminho de b até v, logo mesmo que b esteja aberto, e exista um caminho aberto de s pra b, não existiria um caminho aberto de s para v, isto é, $s \notin W(v \mid B_v \setminus b)$, logo $B_v \setminus b$ é uma v-barreia de s. Portanto B_v não é uma v-barreira minimal.

Assim o lema 3 está provado.

Definição 11. *Dado um conjunto de pontos K, chamamos de* **diâmetro** *de K e denotamos por $diam(K)$ a maior distância entre dois pontos do conjunto K.*

É fácil ver que cada subconjunto finito de V possui um diâmetro.

Definição 12. *Dizemos que a* **distância entre um ponto** s **e um conjunto** K, *denotado por* $dist(s, K)$, *é* $\min_{v \in K} \|s - v\|$.

Também é fácil notar que para cada conjunto finito $K \subset V$ e cada ponto de $s \in V$ existe a distância entre eles.

Definição 13. *Para cada* $i = 1, \ldots, d$, *e para todos* $v \in V$ *chamaremos de i-ésimo* v*-eixo o conjunto*

$$Eixo_i(v) = \{w \in V,\ \exists k \geq 0 : w = v - k \times e_i\} \tag{2.2}$$

Lema 4. *Seja* $d \geq 2$. *Para cada* $i = 1, \ldots, d$, *e dado* $v \in V$ *temos*

$$Eixo_i(v) \cap B_v \neq \emptyset$$

Demonstração: Suponha que nenhum elemento do $Eixo_i(v)$ pertença a v-barreira minimal B_v. Assim nenhum elemento pertencente ao $Eixo_i(v)$ é fechado. Como sempre há interseção do $Eixo_i(v)$ e a $Fonte$ no ponto

$$w = v - \left(\sum_{i=1}^{d} v_i\right) \times e_i.$$

Portanto temos um caminho aberto da $Fonte$ até v, logo $B(v)$ não é uma barreira.

Portanto o lema 4 está provado.

Lema 5. *Seja* $d \geq 2$. *Para cada* v*-barreira minimal* B_v *a distância entre* v *e* B_v *não excede* $diam(B_v)$.

Demonstração:

Utilizando o lema 4, temos que:

- $\exists a \in B_v \cap Eixo_i(v)$, isto é, $\exists \alpha : a = v - \alpha \times e_i$ assim temos $v - a = \alpha \times e_i$ portanto $dist(v, a) = \alpha$.

- $\exists b \in B_v \cap Eixo_j(v)$, isto é, $\exists \beta : b = v - \beta \times e_j$ e analogamente $dist(v, b) = \beta$.

Como $diam(B_v) \geq dist(a, b)$ pois $a, b \in B_v$. E temos

$$\begin{aligned} dist(b,a) &= \max_{k\in\{1,\ldots,d\}} |b_k - a_k| = \max\{|b_i - a_i|, |b_j - a_j|\} \\ &= \max\{|v_i - (v_i - \alpha \times e_i)|,\ |(v_j - \beta \times e_j) - v_j|\} \\ &= \max\{|\alpha \times e_i|, |-\beta \times e_j)|\} = \max\{\alpha, \beta\} \\ &= \max\{dist(v,a), dist(v,b)\}. \end{aligned}$$

Assim $dist(b, a) \geq dist(v, a)$. E como $a \in B_v$ temos $dist(v, a) \geq dist(v, B_v)$.

Portanto o lema 5 está provado.

2.3 Pontos Molhados

Definição 14. *Para cada ponto v em V dizemos que é um **ponto molhado,** se $x_v = 1$, do contrário diremos que é um **ponto seco.***

Lema 6. *Para cada ponto $v \in V$, a $Fonte$ é doador de v se e somente se o ponto v é molhado.*

Demonstração: Suponha que a $Fonte$ seja doador de v, isto é que exista um caminho aberto ligando algum ponto do conjunto $Fonte$ ate v. Seja f este último ponto do caminho que está na $Fonte$, como $a_f = 1$ temos que $x_f = 1$. O próximo ponto ao ponto f no caminho também será molhado pois é aberto e possui um vizinho molhado, transformando assim todos os pontos do caminho aberto em pontos molhados, logo o ponto v é molhado.

Por outro lado, temos que v é molhado então v é aberto e: ou $v \in Fonte$; ou existe um ponto v^1 molhado tal $v^1 = v - e_{k_1}$.

Assim, temos um caminho aberto de v^1 até v, onde v^1 é molhado então v^1 é aberto e: ou $v^1 \in Fonte$; ou existe um ponto v^2 molhado tal $v^2 = v - e_{k_1} - e_{k_2}$.

Indutivamente, criamos um caminho aberto de v^{m-1} até v utilizando os pontos $v^{m-1}, \ldots, v^1, v$, onde v^{m-1} molhado, logo v^{m-1} é aberto e assim: ou $v^{m-1} \in Fonte$; ou existe um ponto v^m molhado tal $v^m = v - e_{k_1} - e_{k_2} - \ldots - e_{k_m}$.

Obtemos assim um caminho aberto o ponto v^m até o ponto v, utilizando os pontos $v^m, v^{m-1}, \ldots, v^2, v^1, v$.

Agora observamos que os pontos v e v^m podem ser escritos como

$$\begin{aligned} v &= v_1 \times e_1 + \ldots + v_d \times e_d, \\ v^m &= v_1 \times e_1 + \ldots + v_d \times e_d - e_{k_1} - e_{k_2} - \ldots - e_{k_m}. \end{aligned}$$

Assim a soma das coordenadas de v^m é:

$$\sum_{i=1}^{d} v_i^m = \sum_{i=1}^{d} v_i - \left(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{m\ vezes} \right) = \sum_{i=1}^{d} v_i - m.$$

Assim se $m = \sum_{i=1}^{d} v_i$, temos que $v^m \in Fonte$, temos que a fonte é doador.
Portanto o lema 6 está provado.

Capítulo 3

Prova do Teorema 1

3.1 Quasi-independência das Componentes do Processo

Neste capítulo provaremos o teorema 1, enunciado no primeiro capítulo.

Definição 15. *Seja $S \subset V$. Diremos que S é* ***cheio de zeros*** *se $a_v = 0$ para todo $v \in S$. Denotaremos o evento correspondente de $Zeros(S)$.*

Então, para cada configuração auxiliar a, escrevemos $a \in Zeros(S)$ se

$$\forall v \in S : a_v = 0.$$

Demonstração do Teorema 1: Para um dado $v \in V$ consideraremos o evento

$$E_v = \{x_v = 0\}$$

significando que o ponto v está seco. Utilizando o lema 6, o ponto v é seco se e somente se a $Fonte$ não é seu doador, isto é, não existe caminho aberto que ligue a $Fonte$ até o ponto v. Portanto o evento E_v equivale a existência de pelo menos uma v-barreira minimal cheia de zeros.

Para cada m natural podemos apresentar

$$E_v = E_v^1 \cup E_v^2,$$

onde E_v^1 significa que existe pelo menos uma v-barreira minimal cheia de zeros com diâmetro menor ou igual a m, e E_v^2 significa a existência de pelo menos uma v-barreira minimal cheia de zeros cujo diâmetro é mais que m.

Tomando uma v-barreira B_v com diâmetro menor ou igual a m, e utilizando o lema 5, temos que a distância entre esta v-barreira e o ponto v não excede $diam(B_v)$. Então o ponto de B_v mais distante de v está no máximo a distância $2 \times diam(B_v)$. Logo esta v-barreira está contida no $\text{Inf}\,(v, 2m)$.

O mesmo pode ser feito para um ponto $s \in V$, assim consideraremos o evento

$$E_s = \{x_s = 0\}$$

e para o mesmo m natural apresentar

$$E_s = E_s^1 \cup E_s^2,$$

onde E_s^1 significa que existe pelo menos uma s-barreira minimal cheia de zeros com diâmetro menor ou igual a m, e E_s^2 significa a existência de pelo menos uma s-barreira minimal cheia de zeros que possua diâmetro mais que m . E também concluir que uma s-barreira com diâmetro menor ou igual a m esta contida no $\text{Inf}\,(s, 2m)$.

Escolheremos o valor de m como sendo

$$m = \begin{cases} \left]\dfrac{\|s-v\|}{4}\right[, & \text{se } \|s-v\| > 2 \\ 0, & c.c. \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\left]\frac{\|s-v\|}{4}\right[$ é o menor inteiro que não é menor que $\frac{\|s-v\|}{4}$.

Assim temos $2m < dist(v, s)$, temos utilizando o lema 2 que os conjuntos $\text{Inf}\,(v, 2m)$ e $\text{Inf}\,(s, 2m)$ não tem pontos em comum. Assim os eventos E_v^1 e E_s^1

são independentes, pois a existência de uma v-barreira minimal cheia de zeros no conjunto $\operatorname{Inf}(v, 2m)$ não possui nenhuma relação com a existência de uma s-barreira minimal cheia de zeros no conjunto $\operatorname{Inf}(s, 2m)$.

Lema 7. *Se o diâmetro de uma v-barreira excede m então esta v-barreira não está contida no* $\operatorname{Inf}(v, m)$

Demonstração: se $diam(B_v) > m$ então

$$\exists a, b \in B_v,\ dist(a, b) > m$$

equivale a

$$\exists a, b \in B_v,\ \max_{i \in \{1,\ldots,d\}} |a_i - b_i| > m$$

$$\exists a, b \in B_v,\ \exists i \in \{1, \ldots, d\} : |a_i - b_i| > m,$$

como a e b pertencem a v-barreira minimal, usando o lema 3 temos $a \prec v$ e também que $b \prec v$, agora note que

- se $a_i > b_i$ então $|v_i - b_i| = |v_i - a_i| + |a_i - b_i| > |v_i - a_i| + m \geq m$
- se $a_i < b_i$ então $|v_i - a_i| = |v_i - b_i| + |b_i - a_i| > |v_i - b_i| + m \geq m$

Seja

$$c = \begin{cases} b, & \text{se } a_i > b_i \\ a, & c.c. \end{cases},$$

assim $\exists c \in B_v$, tal que $|v_i - c_i| > m$ o que implica $dist(v, c) > m$. Portanto a v-barreira não está contida no $\operatorname{Inf}(v, m)$.

Portanto o lema 7 está provado.

O evento E_v^2 significa a existência de pelo menos uma v-barreira cheia de zeros que possua diâmetro mais que m. E pelo lema 7 está v-barreira não está contida no $\operatorname{Inf}(v, m)$.

Denotaremos por H o conjunto de todas v-barreiras minimais que não estão contidas no Inf (v, m). Assim a probabilidade de existir pelo menos uma v-barreira cheia de zeros que possua diâmetro mais que m é

$$\mu(E_v^2) = \sum_{B_v \in H} \theta^{|B_v|}, \tag{3.2}$$

onde $|B_v|$ representa a cardinalidade de B_v, isto é, o número de pontos do conjunto B_v. Seja b é a menor quantidade de pontos das v-barreiras pertencentes a H. Para cada k definimos M_k o número de v-barreiras minimais cheia de zeros contendo k pontos. Assim

$$\sum_{B_v \in H} \theta^{|B_v|} \leq \sum_{k=b}^{\infty} M_k \times \theta^k.$$

A menor quantidade de pontos das v-barreiras que não estão contidas no Inf (v, m) é pelo menos m. Assim b é maior ou igual a m, temos

$$\sum_{k=b}^{\infty} M_k \times \theta^k \leq \sum_{k=m}^{\infty} M_k \times \theta^k$$

Podemos estimar M_k, utilizando a seguinte proposição.

Proposição 1. *Para cada $d \geq 2$ existe número C, a saber*

$$C = (3^{d+1})^{2 \times (1 + d \times 4^d)} \tag{3.3}$$

tal que para cada ponto $s \in V$ e cada natural k o número de v-barreiras minimais contendo k pontos não excede C^k.

Demonstração: A prova encontra-se como lema 14, no artigo de referência [8].

Assim temos $M_k \leq C^k$, assim

$$\mu(E_v^2) < \sum_{k=m}^{\infty} M_k \times \theta^k \leq \sum_{k=m}^{\infty} (C \times \theta)^k.$$

Supondo $\theta < \Theta_d = \frac{1}{C}$ temos que esta série converge, assim

$$\mu(E_v^2) < \frac{(C\theta)^m}{1 - C\theta}. \tag{3.4}$$

De forma similar obtemos o mesmo resultado para o evento E_s^2 o qual significa a existência de pelo menos uma s-barreira minimal cheia de zeros que possua diâmetro mais que m. Assim

$$\mu(E_s^2) < \frac{(C\theta)^m}{1 - C\theta}. \tag{3.5}$$

Usaremos agora um lema demonstrado na dissertação de Andréa Rocha, referência [4], no qual transcrevi para a comodidade do leitor.

Lema 8. *Em qualquer espaço amostral sejam os eventos A e B, onde*

$$A = A_1 \cup A_2 \ e \ B = B_1 \cup B_2.$$

Supondo que A_1 independente de B_1, $\mu(A_2) < \epsilon$ e $\mu(B_2) < \epsilon$ então

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A) \times \mu(B)| < 3\epsilon.$$

Demonstração: Inicialmente consideraremos

$$\begin{aligned} \mu(A \cap B) &= \mu((A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2)) \\ &= \mu((A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_2)), \end{aligned}$$

como $\mu(A_2) < \epsilon$ temos que $\mu(A_2 \cap B_1) < \epsilon$, e como $\mu(B_2) < \epsilon$ também temos que $\mu(A_1 \cap B_2) < \epsilon$ e $\mu(A_2 \cap B_2) < \epsilon$ logo

$$\mu(A \cap B) < \mu(A_1 \cap B_1) + 3\epsilon,$$

assim podemos obter

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A_1 \cap B_1)| < 3\epsilon. \tag{3.6}$$

Como $A_1 \subset A$ então $\mu(A_1) \leq \mu(A)$, analogamente $B_1 \subset B$ então $\mu(B_1) \leq \mu(B)$, temos assim que

$$\mu(A_1) \times \mu(B_1) \leq \mu(A) \times \mu(B) \tag{3.7}$$

Considere agora que

$$\begin{aligned}
\mu(A) \times \mu(B) &= \mu(A_1 \cup A_2) \times \mu(B_1 \cup B_2) \\
&\leq (\mu(A_1) + \mu(A_2)) \times (\mu(B_1) + \mu(B_2)) \\
&= \mu(A_1) \times \mu(B_1) + \mu(A_2) \times \mu(B_1) + \\
&\quad + \mu(A_1) \times \mu(B_2) + \mu(A_2) \times \mu(B_2),
\end{aligned}$$

como $\mu(A_2) < \epsilon$ temos que $\mu(A_2) \times \mu(B_1) < \epsilon$, e como $\mu(B_2) < \epsilon$ também temos que $\mu(A_1) \times \mu(B_2) < \epsilon$ e $\mu(A_2) \times \mu(B_2)$ logo

$$\mu(A) \times \mu(B) \leq \mu(A_1) \times \mu(B_1) + 3\epsilon$$

e utilizando a expresão 3.7 podemos obter

$$|\mu(A) \times \mu(B) - \mu(A_1) \times \mu(B_1)| \leq 3\epsilon.$$

Como por hipótese A_1 e B_1 são independentes temos

$$\mu(A_1 \cap B_1) = \mu(A_1) \times \mu(B_1),$$

sendo assim,

$$|\mu(A) \times \mu(B) - \mu(A_1 \cap B_1)| \leq 3\epsilon. \tag{3.8}$$

Dessa forma pelas expressões 3.6 e 3.8 podemos concluir

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A) \times \mu(B)| \leq 3\epsilon.$$

Portanto o lema 8 está provado.

Tomamos $A_2 = E_v^2$ e utilizamos a expressão (3.4). Também tomamos $B_2 = E_s^2$ e usamos a expressão (3.5). Vimos que os eventos $A_1 = E_v^1$ e $B_1 = E_s^1$ são independentes. Logo pelo lema 8, obtemos a seguinte expressão

$$|\mu(E_v \cap E_s) - \mu(E_v) \times \mu(E_s)| < 3 \times \frac{(C\theta)^m}{1 - C\theta}.$$

Como $\mu(E_s) = \mathrm{E}(1 - x_s),\ \mu(E_v) = \mathrm{E}(1 - x_v)$,

$\mu(E_v \cap E_s) = \mathrm{E}(1 - x_v, 1 - x_s)$ onde $\mathrm{E}(\times)$ é a esperança. Assim

$$|\mathrm{Cov}(1 - x_v, 1 - x_s)| < 3 \times \frac{(C\theta)^m}{1 - C\theta}.$$

Notamos que

$$|\mathrm{Cov}(x_v, x_s)| = |\mathrm{Cov}(1 - x_v, 1 - x_s)|$$

e observando que o valor de m definido em (3.1) excede $\frac{1}{4}\|s - v\|$ assim temos

$$|\mathrm{Cov}(x_v, x_s)| < \frac{3}{1 - C\theta} \times (C\theta)^{\frac{1}{4}\|s-v\|}.$$

Assim concluímos a prova do Teorema 1, fazendo

$$p = \frac{3}{1 - C\theta} \tag{3.9}$$

e

$$q = (C\theta)^{\frac{1}{4}}, \tag{3.10}$$

onde lembrando que $0 < \theta < C^{-1}$ temos $p,\ q > 0$, e $q < 1$.

Portanto o teorema 1 está provado.

Capítulo 4

Prova do Teorema 2

4.1 Lei dos Grandes Números para Componentes do Processo

Neste capítulo apresentaremos a prova do teorema 2, enunciado na primeira secção. Considere o conjunto

$$A = \left\{ v^i : i \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

Inicialmente mostraremos que $\frac{1}{n} \times Var\left(\sum_{v \in A} x_v\right)$ é limitado superiormente, através do seguinte lema

Lema 9. *Para toda dimensão d e todo $\theta \in (0, \Theta_d)$, existe $Q \in \mathbb{R}$, tal que para todo n e todos pontos distintos $v^1, \ldots, v^n$,*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_{v^i}\right) \leq n \times Q.$$

Demonstração:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_{v^i}\right) = \sum_{v \in A} \sum_{s \in A} cov(x_v, x_s). \tag{4.1}$$

Como pelo o teorema anterior $|\text{Cov}(x_v, x_s)| \leq p \times q^{\|s-v\|}$ assim

$$\sum_{v \in A} \sum_{s \in A} cov(x_v, x_s) \leq p \times \sum_{v \in A} \sum_{s \in A} q^{\|s-v\|}.$$

Considere o seguinte conjunto

$$N_k = \{(v, s) \in A \times A : dist(v, s) = k\},$$

seja $a = diam(A)$ e assim podemos observar que

$$\sum_{v \in A} \sum_{s \in A} q^{\|s-v\|} \leq |N_0|q^0 + |N_1|q^1 + |N_2|q^2 + \ldots + N_a q^a = \sum_{k=0}^{diam(A)} |N_k| \times q^k, \quad (4.2)$$

Lema 10. *Para todos d e k naturais, com $k \geq 1$*

$$|N_k| \leq n \times \left[(2k+1)^d - (2k-1)^d\right].$$

Demonstração: Para cada ponto $v \in A$ definimos os seguintes conjuntos

$$D^{\bullet}(v) = \left\{s \in \mathbb{Z}^d : dist\,(v, s) = k\right\} \quad (4.3)$$

$$D_{menor}(v) = \left\{s \in \mathbb{Z}^d : dist\,(v, s) < k\right\} \quad (4.4)$$

$$D^{\bullet}_{menor}(v) = \left\{s \in \mathbb{Z}^d : dist\,(v, s) \leq k\right\}. \quad (4.5)$$

Seja um conjunto formado pelos elementos de $\mathbb{Z}^d$ em que cada coordenada de seus pontos podem assumi m valores distintos, então a cardinalidade desse conjunto é m^d.

Como nos três conjuntos as cardinalidades não dependem do ponto v, temos que $|D^{\bullet}_{menor}(v)| = \left|\left\{s \in \mathbb{Z}^d : \|s\| \leq k\right\}\right|$ e neste conjunto cada coordenada pode assumi $2k+1$ valores distintos, assim $D^{\bullet}_{menor}(v)$ tem cardinalidade $(2k+1)^d$. E $|D_{menor}(v)| = \left|\left\{s \in \mathbb{Z}^d : \|s\| < k\right\}\right|$ e neste conjunto cada coordenada pode assumi $2k-1$ valores distintos, assim $D_{menor}(v)$ tem cardinalidade $(2k-1)^d$.

Agora observe que

$$\begin{aligned} D_{menor}(v) &\subset D^{\bullet}_{menor}(v) \\ D^{\bullet}(v) &= D^{\bullet}_{menor}(v) \setminus D_{menor}(v), \end{aligned}$$

portanto

$$|D^{\bullet}(v)| = (2k+1)^d - (2k-1)^d \,.$$

Vale a pena notar que

$$|N_k| \leq \sum_{v \in A} |D^{\bullet}(v)|.$$

e como temos n pontos distintos em A, e $|D^{\bullet}(v)|$ não depende de v temos

$$|N_k| \leq n \times |D^{\bullet}(v)| = n \times \left[(2k+1)^d - (2k-1)^d\right].$$

Assim o lema 10 está provado.

Agora note que $|N_0| = |\{(v,s) \in A \times A : v = s\}| = |A| = n$, utilizando o lema 10 e voltando a expressão (4.2) temos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{diam(A)} |N_k| \times q^k \leq \\
\leq\ & n + \sum_{k=1}^{diam(A)} n \times \left[(2k+1)^d - (2k-1)^d\right] \times q^k \\
\leq\ & n\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \times \left[(2k+1)^d - (2k-1)^d\right] \times q^k\right) \\
=\ & n \times \left(1 + \left[\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^k - \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^d \times q^k\right]\right) \\
=\ & n \times \left(1 + \left[\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^k - \sum_{k=0}^{\infty}(2k+2-1)^d \times q^{k+1}\right]\right) \\
=\ & n \times \left(1 + \left[\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^k - \left(q + q\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^k\right)\right]\right) \\
=\ & n \times \left(1 - q + (1-q)\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^k\right).
\end{aligned}
$$

Utilizando o seguinte lema

Lema 11. *Para cada $a \in \{0, \ldots, d+1\}$, definimos*

$$K_a = \sum_{m=0}^{a-1}(-1)^m \binom{d+1}{m}(2\,(a-m)+1)^d,$$

temos

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^k = \frac{\sum_{a=1}^{d+1} K_a \times q^a}{(1-q)^{d+1}}.$$

Demonstração: A prova deste lema se encontra no apêndice A.

Denotaremos

$$\frac{\sum_{a=1}^{d+1} K_a \times q^a}{(1-q)^{d+1}} = K. \tag{4.6}$$

portanto temos

$$\sum_{k=0}^{diam(A)} |N_k| \times q^k \leq n \times (1 - q + (1 - q) K). \qquad (4.7)$$

Assim ao aplicamos a espressão (4.7) na expressão (4.2) temos

$$\sum_{v \in A} \sum_{s \in A} q^{\|s-v\|} \leq n \times (1 - q + (1 - q) K),$$

agora voltando a expressão (4.1) temos

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_{v^i}\right) &\leq p \times \left(\sum_{v \in A} \sum_{s \in A} q^{\|s-v\|}\right) \\ &\leq \frac{3}{1 - C\theta} \times n \times (1 - q + (1 - q) K) \\ &= n \times Q, \end{aligned}$$

onde

$$Q = \frac{3 (1 - q + (1 - q) K)}{1 - C\theta} \qquad (4.8)$$

e K definido na expressão (4.6).

Assim o lema 9 está provado

Prova do teorema 2: Usamos a desigualdade clássica de Tchebyshev, que se encontra na referência [3]. A única suposição para o uso desta desigualdade é que $\sum_{i=1}^{n} x_{v^i}$ seja integrável, e é fácil ver que de fato é, assim

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left|\sum_{i=1}^{n} x_{v^i} - \mathrm{E}[\sum_{i=1}^{n} x_{v^i}]\right| > n\epsilon\right) &\leq \frac{Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_{v^i}\right)}{(n\epsilon)^2}, \forall \epsilon > 0 \\
&\leq \frac{n \times Q}{(n\epsilon)^2} \\
&= \frac{1}{n\epsilon^2} \times \left[\frac{3\,(1-q+(1-q)\,K)}{1-C\theta}\right] \\
&= \frac{1}{n} \times \left[\frac{3\,(1-q+(1-q)\,K)}{\epsilon^2(1-C\theta)}\right],
\end{aligned}$$

Logo, apresentamos R como sendo

$$R = \left[\frac{3\,(1-q+(1-q)\,K)}{\epsilon^2(1-C\theta)}\right].$$

onde C, q, e K estão definidas nas respectivas referências (3.3), (3.10) e (4.6).

Assim o Teorema 2 está provado.

Referências Bibliográficas

[1] Geoffrey Grimmett. *Percolation.* second edition. Springer Verlag, 1999

[2] Harry Kesten. *Percolation for mathematicians.* Birkhaüser, Boston, 1982

[3] James, Barry R. *Probalilidade: Um curso em nível intermediario.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1996

[4] Rocha, Andréia V. *Propriedades de medidas invariantes não triviais de autômatos celulares.* Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, março de 2005. (Não publicado.)
Link: http://www.de.ufpe.br/∼toom/ensino/mestrado/alunos/andrea.pdf
Último acesso: 22 de janeiro de 2007 às 9:30.

[5] S. R. Broadbent and J.M. Hammersley,*Percolation Processes I.* Crystals and Mazes, Proceedings of the Cambridge Phylosophical Society, 53, 629-641, (1957).

[6] Toom, André. A Family of Uniform Nets of Formal Neurons.*Soviet Math. (Doklady)* v.9 n.6, pp 1338-1341, 1968 (Originally published in Russian).

[7] Toom, André. *Contornos, Conjuntos Conexos e Autômatos Celulares.* 23º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2001.

[8] Toom, André. *On Large Isolated regions in supercritical percolation.* Journal of Stat. Physics, v. 109, n. 5/6, 2002, pp. 1091-1108.

Índice Remissivo

Apêndice A

Demostração do Lema 11.

Primeiramente lembramos que

$$(1-q)^{d+1} = \binom{d+1}{0}1 + (-1)\binom{d+1}{1}q + (-1)^2\binom{d+1}{2}q^2 + \ldots + (-1)^d\binom{d+1}{d}q^d + (-1)^{d+1}\binom{d+1}{d+1}q^{d+1}$$

Multiplicando ambos os membros pelo somatório teremos

$$\begin{aligned}
&(1-q)^{d+1}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^k = \\
= \quad &\binom{d+1}{0}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^k + (-1)\binom{d+1}{1}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+1} + (-1)^2\binom{d+1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+2} + \ldots \\
&\ldots + (-1)^d\binom{d+1}{d}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+d} + (-1)^{d+1}\binom{d+1}{d+1}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+d+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \binom{d+1}{0}\left(\sum_{k=1}^{d+1}(2k+1)^d \times q^k + \sum_{k=d+2}^{\infty}(2k+1)^d \times q^k\right) + (-1)\binom{d+1}{1}\left(\sum_{k=1}^{d}(2k+1)^d \times q^{k+1} + \sum_{k=d+1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+1}\right) \\
& +(-1)^2\binom{d+1}{2}\left(\sum_{k=1}^{d-1}(2k+1)^d \times q^{k+2} + \sum_{k=d}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+2}\right) + \ldots \\
& \ldots + (-1)^d\binom{d+1}{d}\left(\sum_{k=1}^{1}(2k+1)^d \times q^{k+d} + \sum_{k=2}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+d}\right) + (-1)^{d+1}\binom{d+1}{d+1}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+d+1} \\
= \; & \left[\binom{d+1}{0}\sum_{k=1}^{d+1}(2k+1)^d \times q^k + (-1)\binom{d+1}{1}\sum_{k=1}^{d}(2k+1)^d \times q^{k+1} + (-1)^2\binom{d+1}{2}\sum_{k=1}^{d-1}(2k+1)^d \times q^{k+2} + \ldots\right. \\
& \left.\ldots + (-1)^d\binom{d+1}{d}\sum_{k=1}^{1}(2k+1)^d \times q^{k+d}\right] + \left[\binom{d+1}{0}\sum_{k=d+2}^{\infty}(2k+1)^d \times q^k + (-1)\binom{d+1}{1}\sum_{k=d+1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+1} + \right. \\
& \left. +(-1)^2\binom{d+1}{2}\sum_{k=d}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+2} + \ldots + (-1)^d\binom{d+1}{d}\sum_{k=2}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+d} + (-1)^{d+1}\binom{d+1}{d+1}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+d+1}\right]
\end{aligned}
$$

Chamaremos a expressão entre os primeiros chochetes de I, e a expressão entre os últimos cochetes de II.

Trabalhando com a expressão II, temos

$$
\begin{aligned}
II \; = \; & \left[\binom{d+1}{0}\sum_{k=d+2}^{\infty}(2k+1)^d \times q^k + (-1)\binom{d+1}{1}\sum_{k=d+1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+1} + (-1)^2\binom{d+1}{2}\sum_{k=d}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+2} + \ldots\right. \\
& \left.\ldots + (-1)^d\binom{d+1}{d}\sum_{k=2}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+d} + (-1)^{d+1}\binom{d+1}{d+1}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+d+1}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Bigg[\binom{d+1}{0}\sum_{k=1}^{\infty}(2\,(k+d+1)+1)^d \times q^{k+d+1} + (-1)\binom{d+1}{1}\sum_{k=1}^{\infty}(2\,(k+d)+1)^d \times q^{k+d+1} + \\
&\quad (-1)^2\binom{d+1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(2\,(k+d-1)+1)^d \times q^{k+d+1} + \ldots (-1)^d\binom{d+1}{d}\sum_{k=1}^{\infty}(2\,(k+1)+1)^d \times q^{k+d+1} \\
&\quad +(-1)^{d+1}\binom{d+1}{d+1}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^{k+d+1}\Bigg] \\
&= \sum_{m=0}^{d+1}(-1)^m\binom{d+1}{m}\sum_{k=1}^{\infty}(2\,(k+d+1-m)+1)^d \times q^{k+d+1} \\
&= q^{d+1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[q^k\sum_{m=0}^{d+1}(-1)^m\binom{d+1}{m}(2k+2d-2m+3)^d\right],
\end{aligned}
$$

mas observamos este somatório

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{d+1}(-1)^m\binom{d+1}{m}(2k+2d-2m+3)^d &= \sum_{m=0}^{d+1}(-1)^m\binom{d+1}{m}(2k+2d-2m+3)^{d-m+m} = \\
&= \sum_{m=0}^{d+1}\binom{d+1}{m}(2k+2d-2m+3)^{d-m}(-2k-2d+2m-3)^m \\
&= [(2k+2d-2m+3)+(-2k-2d+2m-3)]^{d+1} = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
II = q^{d+1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[q^k \times 0\right] = 0
$$

Portanto

$$\begin{aligned}
(1-q)^{d+1}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^k &= I \\
&= \Bigg[\binom{d+1}{0}\sum_{k=1}^{d+1}(2k+1)^d \times q^k + (-1)\binom{d+1}{1}\sum_{k=1}^{d}(2k+1)^d \times q^{k+1} + \\
&\quad +(-1)^2\binom{d+1}{2}\sum_{k=1}^{d-1}(2k+1)^d \times q^{k+2} + \ldots + (-1)^d\binom{d+1}{d}\sum_{k=1}^{1}(2k+1)^d \times q^{k+d}\Bigg] \\
&= \sum_{m=0}^{d}(-1)^m\binom{d+1}{m}\sum_{k=1}^{d+1-m}(2k+1)^d \times q^{k+m} = \sum_{m=0}^{d}\sum_{k=1}^{d+1-m}(-1)^m\binom{d+1}{m}(2k+1)^d \times q^{k+m} \\
&= \sum_{m=0}^{d}\sum_{a=m+1}^{d+1}(-1)^m\binom{d+1}{m}(2(a-m)+1)^d \times q^a \\
&= \sum_{a=1}^{d+1}q^a\sum_{m=0}^{a-1}(-1)^m\binom{d+1}{m}(2(a-m)+1)^d,
\end{aligned}$$

Fazendo $K_a = \sum_{m=0}^{a-1}(-1)^m\binom{d+1}{m}(2(a-m)+1)^d$, para $a = 1, \ldots, d+1$, temos

$$(1-q)^{d+1}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^d \times q^k = \sum_{a=1}^{d+1}K_a q^a$$

E assim concluimos a prova.

Sampaio, Murilo de Medeiros

Lei de grandes números na percolação multidimensional / Murilo de Medeiros Sampaio - Recife : O autor, 2007.

vii, 34 folhas : il., fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Estatística, 2007.

Inclui bibliografia.

1. Percolação Teoria. 2. Lei dos grandes números. I. Título.

530.13 CDD (22.ed.) MEI2007-015