

---

PROPRIEDADES DE MEDIDAS INVARIANTES  
NÃO-TRIVIAIS DE AUTÔMATOS CELULARES

ANDRÉA VANESSA ROCHA

Orientador: Prof. Ph.D. Andrei Toom

Área de Concentração: Probabilidade

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do  
grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2005

---

Universidade Federal de Pernambuco  
Mestrado em Estatística

17 de fevereiro de 2005

(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Andréa Vanessa Rocha

intitulada

Propriedades de medidas invariantes não-triviais de autômatos celulares

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.



Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

A. T. Amorim

André Amorim

 Prof. Francisco Vilas Boas  
Coordenador de Mestrado  
em Estatística da UFPE

orientador

Nancy Lopes Garcia

Nancy Lopes Garcia (UNICAMP)

Klaus Leit Pinto Vasconcelos

Klaus Leit Pinto Vasconcelos

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

À meus pais,  
Albertino (em memória) e Leonice.

## Agradecimentos

Ao meu amado Pai Celestial pelo privilégio de minha vida e por todas as bênçãos que me são dadas, a Seu filho Jesus Cristo pelo seu amor incondicional, dando-me a capacidade de desenvolver este trabalho.

Aos meus amados pais Lenonice e Albertino que estão eternamente presentes em meu coração, os quais também agradeço pela minha formação pessoal.

Aos meus irmãos Marco Aurélio e Marcos Vinícius, estendendo a todos os outros irmãos e familiares, pelo amor, apoio e companheirismo durante todos os momentos de minha vida.

Ao professor Andrei Toom pela ajuda em todas as horas, confiança, seriedade e segurança no desenvolvimento desse trabalho, além da importante contribuição para o meu crescimento acadêmico.

Ao meu amor Alexandre Simas pela sua preciosa colaboração durante a realização deste trabalho, por colaborar para o avanço tanto da minha vida profissional quanto da pessoal através do amor e da compreensão, e que apesar de ter entrado há pouco tempo em minha vida já se faz fundamental.

Às minhas amigas da Estatística, Angela, Juliana e Patricia. Em especial, a Tarciana pela total disponibilidade em apoiar tanto a minha vida acadêmica quanto a pessoal e a Tatiene pelo seu carinho e cumplicidade.

Aos meus professores: Cláudia Lima, Edmilson Mazza, Francisco Cribari-Neto, Klaus Vasconcellos, Manoel Sena, Sylvio Pereira e Viviana Giampaoli. Em especial à professora Maria Cristina por contribuir tanto na minha vida profissional quanto na pessoal. À secretária Valéria Bittencourt pela atenciosidade, estendendo a todos os funcionários do departamento de Estatística.

Aos meus colegas de mestrado André, Antônio Carlos, Cherubino (em memória), Gecynalda, José Alvino, Lenaldo, Renata, Sandra Maria, Sandra Rêgo e Tatiane pela convivência.

À CAPES pelo apoio financeiro.

## Resumo

Nós estudamos algumas propriedades de medidas invariantes não-triviais de uma classe de autômatos celulares, ou AC, unidimensional, incluindo a lei dos grandes números para qualquer função local no espaço configuracional  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . Uma configuração  $x$  é uma sequência bi-infinita  $\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$  com componentes  $x_i \in \{0, 1\}$ . Uma função em  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  é dita local se depende apenas de um conjunto finito de componentes. Nossos AC's são operadores lineares contínuos  $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , onde  $\mathcal{M}$  é o conjunto das medidas normalizadas em  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . Toda componente  $i \in \mathbb{Z}$  tem dois vizinhos, ele mesmo e  $i + 1$ , e qualquer AC  $P$  da nossa classe é determinada por quatro probabilidades de transição  $\pi(0|x_i, x_{i+1})$ , a probabilidade de termos o estado 0 na componente  $i$  independentemente das outras componentes após a aplicação de  $P$  a uma configuração  $x$ . As outras quatro probabilidades de transição de terem 1 na mesma componente são determinadas por  $\pi(0|x_i, x_{i+1}) + \pi(1|x_i, x_{i+1}) \equiv 1$ . Nós assumimos que  $\pi(0|0, 0) = 1$ , donde a medida  $\delta_0$  concentrada em “todos zeros” é invariante para  $P$  e nós a chamamos de trivial. Também, assumimos que as outras três probabilidades  $\pi(0|x_i, x_{i+1})$  são pequenas o suficiente e satisfazem três desigualdades, onde duas garantem a monotonicidade de  $P$ . Então  $P$  tem outra medida invariante, a qual denotamos  $\mu_{\text{inv}}$  e a chamamos de não-trivial. Esta é dada por  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n \delta_1$ , onde  $\delta_1$  é concentrada em “todos uns”; para esta medida nós provamos que as correlações entre eventos e funções locais, que estão longe entre si, decaem exponencialmente, e também provamos a lei dos grandes números.

## Abstract

We study properties of non-trivial invariant measures of a class of one-dimensional cellular automata or CA including the law of large numbers for any local function on the configuration space  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . A configuration  $x$  is a bi-infinite sequence  $\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$  with components  $x_i \in \{0, 1\}$ . A function on  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  is local if it depends only on a finite set of components. Our CA are linear continuous operators  $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , where  $\mathcal{M}$  is the set of normed measures on  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . Every site  $i \in \mathbb{Z}$  has two neighbors - itself and  $i + 1$  and any CA  $P$  of our class is determined by four transition probabilities  $\pi(0|x_i, x_{i+1})$ , the probabilities to have a state 0 at a site  $i$  independently from other sites after application of  $P$  to a configuration  $x$ . The other four transition probabilities to have 1 at the same site are determined by  $\pi(0|x_i, x_{i+1}) + \pi(1|x_i, x_{i+1}) \equiv 1$ . We assume that  $\pi(0|0, 0) = 1$ , whence the measure  $\delta_0$  concentrated in “all zeros” is invariant for  $P$  and we call it trivial. Also we assume that the other three probabilities  $\pi(0|x_i, x_{i+1})$  are small enough and satisfy three inequalities, two of which mean that  $P$  is monotonic. Then  $P$  has another invariant measure, which we denote  $\mu_{\text{inv}}$  and call non-trivial. It equals  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n \delta_1$ , where  $\delta_1$  is concentrated in “all ones”, for this measure we prove exponential decay of correlations between local events and functions, which are far from each other, and law of large numbers.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Autômatos Celulares</b>	<b>3</b>
2.1	Uma Definição Geral de Autômato Celular	4
2.2	Uma Família de Autômatos Celulares em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$	5
2.3	O Processo de Stavskaya	6
2.4	Uma Generalização do Processo de Stavskaya	7
<b>3</b>	<b>Enunciados dos Teoremas</b>	<b>13</b>
3.1	Processo de Stavskaya	13
3.2	Processo de Stavskaya Generalizado	15
<b>4</b>	<b>Demonstrações das Proposições e Teoremas</b>	<b>17</b>
4.1	Processo de Stavskaya	19
4.1.1	Demonstração da Proposição 1	23
4.1.2	Demonstração do Teorema 1	25
4.1.3	Demonstração do Teorema 2	29
4.1.4	Demonstração do Teorema 3	33
4.1.5	Demonstração do Teorema 4	37
4.1.6	Demonstração do Teorema 5	39
4.2	Processo de Stavskaya Generalizado	42
4.2.1	Demonstração da Proposição 2	45
4.2.2	Demonstração do Teorema 6	46
4.2.3	Demonstração do Teorema 7	47
4.2.4	Demonstração do Teorema 8	50
4.2.5	Demonstração do Teorema 9	52
4.2.6	Demonstração do Teorema 10	53
<b>5</b>	<b>Discussões, Comentários e Sugestões de Pesquisa</b>	<b>56</b>
	<b>Referências</b>	<b>58</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimas décadas, a teoria (mais precisamente várias teorias ainda não unificadas) de processos aleatórios com interação local desenvolveu-se rapidamente. Formalmente estes processos entram na definição geral de processos aleatórios, mas em essência eles apresentam novos desafios. O desenvolvimento da teoria de processos aleatórios com interação local é realmente novo na matemática moderna e precisa de métodos novos de pesquisa.

Sistemas deste tipo sempre têm um conjunto (finito ou infinito) chamado espaço, um parâmetro chamado tempo e um outro conjunto dos estados possíveis de cada componente, os quais podem ser discretos ou contínuos. A teoria dos autômatos celulares aleatórios começou a se desenvolver há várias décadas, mas ela ainda aparece como uma pilha de estudos isolados com muitas lacunas. A monografia de Liggett [L.1985] contribuiu muito para o estudo de sistemas de partículas interativas em tempo contínuo. Em nosso caso o tempo é discreto - como também o espaço. Sobre processos com tempo discreto veja [D.1990, T.1995, T.2001]. Em suma as definições básicas são conceitualmente simples, o que nos permite evitar definições pesadas.

Apesar de sua simplicidade conceitual, os autômatos celulares descrevem uma gama de fenômenos interessantes. Em um autômato celular com tempo discreto e probabilidades de transição positivas, qualquer evento local pode acontecer com uma probabilidade positiva (o que não é verdade para sistemas com tempo contínuo onde só uma mudança pode acontecer a cada vez). Nós estamos particularmente interessados em estudar algumas medidas invariantes de processos aleatórios, i.e., quando o tempo tende a infinito. Entre as propriedades estudadas está a quase independência de eventos definidos nos autômatos celulares avaliados.

Inicialmente estudamos o Processo de Stavskaya, apresentado pela primeira vez por Stavskaya [SP.1971], onde enunciamos e demonstramos cinco novos teoremas sobre a medida invariante deste processo. Entre os teoremas demonstrados podemos citar a lei dos grandes números para funções locais definidas no espaço deste processo. Introduzimos, neste trabalho, uma nova classe de autômatos celulares, que contém o Processo de Stavskaya,



a qual denotamos por Processo de Stavskaya Generalizado. Para esta nova classe demonstramos cinco teoremas análogos, também novos. Logo, todos os teoremas deste trabalho são resultados novos. Quando enunciamos resultados conhecidos, chamamos-los de proposições.

A presente dissertação está organizada da seguinte maneira: O Capítulo 2 apresenta uma definição geral de autômatos celulares, incluindo as definições dos dois principais autômatos celulares deste trabalho. O Capítulo 3 contém os principais resultados relatados em forma de teoremas. O Capítulo 4 é composto pela demonstração destes teoremas. O trabalho é encerrado no Capítulo 5 com alguns comentários e sugestões de tópicos para investigação futura.

## Capítulo 2

### Autômatos Celulares

Inicialmente apresentaremos uma definição geral de autômatos celulares. Chamemos de *espaço* qualquer conjunto contável  $S$ . Seja  $m \in \mathbb{N}$  e seja  $M = \{0, 1, \dots, m-1, m\}$  o conjunto de *estados* de cada *componente*  $i \in S$ . Definimos *configuração* como uma função de  $S$  em  $M$  e seja  $\Omega = M^S$  o *espaço de configurações* ou *espaço amostral*. Cada configuração  $x \in \Omega$  tem componentes  $x_i \in M$  para todo  $i \in S$ .

Chamemos um *cilindro fino* qualquer subconjunto de  $\Omega$  da forma

$$c = \{x \in \Omega : x_{i_1} = a_{i_1}, \dots, x_{i_n} = a_{i_n}\},$$

onde  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  são componentes de  $x$  e  $a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \in M$  são constantes. Quando lidamos com cilindros finos definidos assim sempre supomos que  $i_1 < \dots < i_n$ . Dizemos que um cilindro fino  $c$  tem base  $B \subset S$ , onde  $B$  é finito, se  $c$  pode ser escrito como  $\{x \in \Omega : x_B = a_B\}$ .

Seja  $\mathcal{A}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos cilindros finos de  $\Omega$ . Estamos interessados em medidas normalizadas em  $\Omega$ , ou seja, aquelas que assumem valor 1 em  $\Omega$ . Denotamos por  $\mathcal{M}$  o conjunto destas medidas.

Estas medidas devem ser consistentes no seguinte sentido:  $\forall \mu \in \mathcal{M}$ ,

$$\sum_{a_{i_0}} \mu(x_{i_0} = a_{i_0}, x_{i_1} = a_{i_1}, \dots, x_{i_n} = a_{i_n}) = \mu(x_{i_1} = a_{i_1}, \dots, x_{i_n} = a_{i_n}).$$

Para cada  $k \in M$ , chamaremos de  $\delta_k$  a medida concentrada na configuração “todos  $k$ ”. Assim, se  $c \in \mathcal{A}$

$$\delta_k(c) = \begin{cases} 1, & \text{se “todos } k” \in c, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Mais geralmente, seja  $y \in \Omega$  qualquer, definimos a  $\delta$ -medida em  $y$  como sendo

$$(\delta(y))(c) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in c, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Se  $\nu, \mu_1, \mu_2, \dots \in \mathcal{M}$ , dizemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \nu$$

se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(c) = \nu(c)$  para todo cilindro fino  $c$ .

## 2.1 Uma Definição Geral de Autômato Celular

Consideramos operadores de um tipo especial definido a seguir. Para cada  $i \in S$  existe um conjunto finito  $V(i) \subset S$  chamado de *vizinhança* de  $i$ . Para qualquer conjunto  $I \subset S$ , definimos sua vizinhança como

$$V(I) = \cup_{i \in I} V(i).$$

Autômatos celulares determinísticos, i.e. operadores  $D : \Omega \rightarrow \Omega$ , são dados por funções  $f_i : M_{V(i)} \rightarrow M$  tais que

$$(Dx)_i = f(x_{V(i)}), \quad \forall i \in S,$$

onde  $M_{V(i)}$  é o conjunto das  $n$ -uplas ordenadas de valores de  $x_{V(i)}$ ,  $n$  sendo a quantidade de elementos de  $V(i)$ .

O autômato celular em que estamos interessado é uma função  $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ . Um operador  $P$  desta classe age em  $\mu \in \mathcal{M}$  da seguinte forma:

$$(P\mu)(y_W = b_W) = \sum_{a_{V(W)}} \mu(x_{V(W)} = a_{V(W)}) \prod_{i \in W} \pi_i(b_i | a_{V(i)})$$

para qualquer  $W \subset S$  e qualquer  $b_W$ , onde  $\pi_i(b | a_{V(i)})$  é a probabilidade condicional de que após a aplicação do operador  $P$ , a  $i$ -ésima componente estará no estado  $b$  se antes da aplicação a vizinhança de  $i$  estava no estado  $a_{V(i)}$ , esta probabilidade é chamada de *probabilidade de transição*.

Neste caso geral estamos trabalhando com operadores aleatórios, no entanto podemos trabalhar também com qualquer operador determinístico se considerarmos este como um operador aleatório degenerado, que transforma uma  $\delta$ -medida em uma  $\delta$ -medida. Desta forma sua probabilidade de transição é

$$\pi_i(b | x_{V(i)}) = \begin{cases} 1, & \text{se } b = f_i(x_{V(i)}), \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Denotamos  $P^t \mu$  o resultado de  $t$  aplicações de  $P$  para qualquer medida  $\mu$ . Chamaremos uma medida  $\mu$  de *invariante* para um operador  $P$  se  $P\mu = \mu$ . Um operador  $P$  é chamado

ergódico se ele só tem uma medida invariante  $\mu_{\text{inv}}$  e  $\forall \mu \lim_{n \rightarrow \infty} P^n \mu = \mu_{\text{inv}}$ . Neste contexto, é interessante estudar propriedades de medidas invariantes de autômatos celulares, especialmente quando estas medidas não são únicas.

## 2.2 Uma Família de Autômatos Celulares em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$

Como essa definição de autômatos celulares é muito geral e pode conduzir a perguntas as quais não têm solução algorítmica [K.1978, P.1987, T.2000a, T.2000b], vamos para classes particulares. Supomos, então, que o espaço onde estão os componentes é  $\mathbb{Z}$  e chamaremos os elementos desse espaço de pontos. Consideramos que cada ponto  $i \in \mathbb{Z}$  tem dois *estados* possíveis, os quais denotamos por 0 e 1. Sendo assim, acreditamos que um ponto pode estar no estado 0, representando, por exemplo, que o mesmo está vazio, ou pode estar no estado 1, representando que o mesmo contém uma partícula. Dessa maneira, o espaço configuracional é  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  e qualquer configuração  $x \in \Omega$  é determinada por suas componentes  $x_i \in \{0, 1\}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ .

Consideremos agora os autômatos celulares satisfazendo (2.1) e para os quais a vizinhança do estado  $i$  em que as probabilidades de transição atuam é  $\{i, i+1\}$ . Assim, dada uma medida  $\mu$ , podemos escrever o operador  $P$  atuando em  $\mu$  como:

$$(P\mu)(y_W = b_W) = \sum_{a_{V(W)}} \mu(x_{V(W)} = a_{V(W)}) \prod_{i \in W} \pi_i(b_i | a_i, a_{i+1}).$$

Observemos que, dada uma medida  $\mu$ , o valor de  $P\mu$  é determinado pelas probabilidades de transição; é possível perceber, então, que, como  $a_i$  e  $a_{i+1}$  só podem assumir dois estados, temos 8 possibilidades para as probabilidades de transição, no entanto, temos 4 possibilidades que determinam o nosso AC.

Seja  $\pi_i(0 | 0, 0) = 1$ , assim, temos que ainda sobram 3 valores independentes para as probabilidades de transição, a saber,  $\pi_i(0 | 0, 1)$ ,  $\pi_i(0 | 1, 0)$  e  $\pi_i(0 | 1, 1)$ , pois todo o espaço é uniforme e, considerando apenas operadores uniformes, podemos omitir  $i$ ; assim, denotamos respectivamente as probabilidades por  $\pi_{0,1}$ ,  $\pi_{1,0}$  e  $\pi_{1,1}$ , ou seja,

$$\pi_i(0 | 0, 1) = \pi_{0,1}, \quad \pi_i(0 | 1, 0) = \pi_{1,0} \quad \text{e} \quad \pi_i(0 | 1, 1) = \pi_{1,1}. \quad (2.2)$$

Temos que a família a qual acabamos de introduzir possui vários autômatos celulares,

estes autômatos são determinados pelos valores das probabilidades de transição. Duas classes de autômatos celulares pertencentes a esta família serão estudadas.

A primeira classe é o processo de Stavskaya, que considera

$$\pi_{0,1} = \pi_{1,0} = \pi_{1,1} = \beta.$$

Apesar de ter essa condição forte, se  $\beta$  é bastante pequeno ele é não-ergódico, i.e., admite medida invariante não-trivial, e nele ocorre transição fásica, o que o torna bem interessante. O segundo é uma generalização do processo de Stavskaya chamada processo de Stavskaya generalizado; neste, os 3 parâmetros podem ser diferentes. Se todos os parâmetros são pequenos, este processo também é não-ergódico e nele ocorre transição fásica.

### 2.3 O Processo de Stavskaya

Definiremos agora a primeira classe de autômatos celulares sobre na qual estamos interessados.

Vamos apresentar nosso autômato celular conhecido como *processo de Stavskaya*, o qual abreviamos por PS. Assumimos que as partículas têm duas funções básicas dos seres vivos, a saber, reprodução e morte. O PS foi um dos primeiros exemplos de processos aleatórios onde a existência de transição fásica e valor crítico foi provada rigorosamente. Consideremos que a reprodução seja dada de forma determinística e a morte de forma aleatória. O tempo é dado de forma discreta. Assim, em cada passo do tempo duas transformações ocorrem: primeiro, a reprodução determinística definida pelo operador  $D$ , e, então, a morte aleatória definida pelo operador  $R_\beta$ , onde  $\beta \in [0, 1]$ . Após a ação de  $D$  toda partícula que está em algum ponto  $i$ , gera outra partícula no ponto  $i - 1$  a menos que este ponto já esteja ocupado, ou seja, mais explicitamente

$$(Dx)_i = \max(x_i, x_{i+1}).$$

Agora definiremos  $R_\beta$  como sendo a morte aleatória das partículas. Após a sua ação, toda partícula morre, ou seja, 1 torna-se 0 com probabilidade  $\beta$  independentemente do que acontece com as outras partículas. Sendo assim,  $\beta$  é chamado de *taxa de mortalidade* e é o único

parâmetro do nosso processo. Escrevendo o processo de Stavskaya explicitamente, temos que

$$\pi(0 \mid a_i, a_{i+1}) = \begin{cases} 1, & \text{se } a_i = a_{i+1} = 0, \\ \beta, & \text{c.c..} \end{cases},$$

e que,

$$\pi(1 \mid a_i, a_{i+1}) = 1 - \pi(0 \mid a_i, a_{i+1}).$$

Este processo foi introduzido em [SP.1971]. É evidente que a medida  $\delta_0$  concentrada em configuração “todos zeros” é invariante para o operador de Stavskaya. No mesmo trabalho foi provado que se  $\beta$  é bastante grande (por exemplo  $\beta > 1/2$ ), o processo de Stavskaya é ergódico, i.e., admite uma única medida invariante.

A propriedade mais interessante do processo de Stavskaya é que para valores de  $\beta$  bastante pequenos o PS possui pelo menos uma medida invariante não-trivial (diferente de  $\delta_0$ ). Isto foi sugerido no mesmo trabalho, baseado em modelagem computacional, mas sem demonstração. Depois foi provado em [T.1968]. É possível encontrar outras referências em [D.1990]. Esta medida, denotada por  $\mu_{\text{inv}}$ , pode ser obtida por meio de processo de limite, a saber

$$\mu_{\text{inv}} = \lim_{t \rightarrow \infty} (R_\beta D)^t \delta_1. \quad (2.3)$$

Ainda que este fato já tenha sido provado, prová-lo-emos na página 23 para conveniência do leitor. Ainda que o PS seja bastante conhecido, há pouco estudos das propriedades da  $\mu_{\text{inv}}$ . Conhecemos só uma [T.1972], que é complementar em nosso estudo. Provamos aqui que  $\mu_{\text{inv}}$  possui propriedades interessantes, com isso podemos demonstrar teoremas com respeito a esta medida, ainda que em [T.1972] tenha sido demonstrado que  $\mu_{\text{inv}}$  não é muito boa.

## 2.4 Uma Generalização do Processo de Stavskaya

Consideraremos agora o nosso assunto mais importante: o processo de Stavskaya generalizado, o qual abreviamos por PSG, onde

$$\pi_{1,1} \leq \pi_{0,1}, \quad \pi_{1,1} \leq \pi_{1,0}, \quad \pi_{1,1} \geq \pi_{0,1}\pi_{1,0}; \quad (2.4)$$

será provado que este fato é equivalente a supor que o operador aleatório é dado da forma  $R_{\alpha,\beta,\gamma}$ , com os parâmetros  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  denotando três taxas de mortalidade do operador assim

definido. Dados  $\alpha, \beta, \gamma$ , as  $\pi(1 \mid a_i, a_{i+1})$  são definidas assim:

$$\pi(1 \mid a_i, a_{i+1}) = \begin{cases} (1 - \alpha)(1 - \beta), & \text{se } a_i = 1, a_{i+1} = 0, \\ (1 - \gamma)(1 - \beta), & \text{se } a_i = 0, a_{i+1} = 1, \\ (1 - \alpha\gamma)(1 - \beta), & \text{se } a_i = a_{i+1} = 1, \\ 0, & \text{se } a_i = a_{i+1} = 0, \end{cases}$$

e, temos ainda que,

$$\pi(0 \mid a_i, a_{i+1}) = 1 - \pi(1 \mid a_i, a_{i+1}).$$

Neste caso, a aplicação do operador aleatório é determinada da seguinte maneira: se existir uma partícula no ponto  $i$ , esta partícula morre com probabilidade  $\alpha$  se tiver surgido da componente  $x_i$ , e morre com probabilidade  $\gamma$  se tiver surgido da componente  $x_{i+1}$ . Logo em seguida ela pode morrer com probabilidade  $\beta$ , caso ainda exista.

Provaremos mais adiante, página 45, que para valores de  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  bastante pequenos, o processo de Stavskaya generalizado também possui pelo menos uma medida invariante não-trivial, a qual denotaremos por  $\mu_{\text{inv}}$ , onde

$$\mu_{\text{inv}} = \lim_{t \rightarrow \infty} (R_{\alpha, \beta, \gamma} D)^t \delta_1. \quad (2.5)$$

Agora vamos mostrar uma condição sobre as probabilidades de transição do PSG. O intuito é mostrar que, de fato esse processo é uma boa generalização do PS no sentido de que podemos escolher as três probabilidades de transição com certa restrição e a partir daí escolher  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  satisfazendo as condições do modelo.

Considere abaixo o Quadro 1, contendo as probabilidades de transição:

$x_i$	$x_{i+1}$	$\pi(0 \mid x_i, x_{i+1})$	$\pi(1 \mid x_i, x_{i+1})$
0	0	1	1
0	1	$\pi_{0,1}$	$\beta + (1 - \beta)\gamma$
1	0	$\pi_{1,0}$	$\beta + (1 - \beta)\alpha$
1	1	$\pi_{1,1}$	$\beta + (1 - \beta)\alpha\gamma$

**Quadro 1.** Probabilidades de transição do PSG.

$\pi_{0,1}, \pi_{1,0}$  e  $\pi_{1,1}$  são dadas em (2.2). Assim, é claro que

$$\pi_{0,1} = \beta + (1 - \beta)\gamma, \quad \pi_{1,0} = \beta + (1 - \beta)\alpha \quad \text{e} \quad \pi_{1,1} = \beta + (1 - \beta)\alpha\gamma. \quad (2.6)$$

Lema (Condição nos parâmetros do PSG): Dados  $\pi_{0,1}, \pi_{1,0}$  e  $\pi_{1,1}$  é possível encontrar  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  tais que (2.6) é verdade se e somente se as desigualdades em (2.4) são verdadeiras.

É interessante o fato de que o conjunto de ternas ordenadas  $(\pi_{0,1}, \pi_{1,0}, \pi_{1,1})$  que satisfazem (2.4) é tri-dimensional.

Olhando mais para frente, a saber, Afirmação 4, é possível notar que esta condição acima implica o que chamamos monotonicidade do PSG.

Agora vamos provar o lema:

*Numa direção*: Temos que dados  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$  definimos  $\pi_{0,1}, \pi_{1,0}, \pi_{1,1}$  como acima, portanto as seguintes propriedades valem trivialmente:

$$0 \leq \pi_{0,1}, \pi_{1,0}, \pi_{1,1} \leq 1.$$

Ainda,

$$\pi_{0,1} \geq \pi_{1,1}, \quad \pi_{1,0} \geq \pi_{1,1}.$$

Provemos então que  $\pi_{1,1} \geq \pi_{0,1}\pi_{1,0}$ . Se  $\beta = 0$  ou  $\beta = 1$ , vale trivialmente. Se não, temos:

$$\begin{aligned} \beta + (1 - \beta)\alpha\gamma &\geq [\beta + (1 - \beta)\gamma][\beta + (1 - \beta)\alpha] \\ \beta + (1 - \beta)\alpha\gamma &\geq \beta^2 + \beta(1 - \beta)\gamma + \beta(1 - \beta)\alpha + (1 - \beta)^2\alpha\gamma \\ \beta - \beta^2 + (1 - \beta)\alpha\gamma &\geq \beta(1 - \beta)(\alpha + \gamma) + (1 - \beta)^2\alpha\gamma \\ \beta + \alpha\gamma &\geq \beta(\alpha + \gamma) + (1 - \beta)\alpha\gamma \\ \beta &\geq \beta(\alpha + \gamma) - \beta\alpha\gamma \\ 1 &\geq \alpha + \gamma - \alpha\gamma \\ 1 - \alpha - \gamma + \alpha\gamma &\geq 0 \\ (1 - \alpha)(1 - \gamma) &\geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, todas as propriedades são válidas.

*Noutra direção*: Inicialmente, dados  $\pi_{0,1}, \pi_{1,0}, \pi_{1,1}$ , iremos achar  $\alpha, \beta, \gamma$ . Assim,

$$1 - \pi_{0,1} = (1 - \beta) - (1 - \beta)\gamma = (1 - \beta)(1 - \gamma),$$

$$1 - \pi_{1,0} = (1 - \beta) - (1 - \beta)\alpha = (1 - \beta)(1 - \alpha)$$



e

$$1 - \pi_{1,1} = (1 - \beta) - (1 - \beta)\alpha\gamma = (1 - \beta)(1 - \alpha\gamma).$$

Desconsidere no momento os casos em que os denominadores são iguais a zero, assim,

$$\frac{1 - \pi_{0,1}}{1 - \pi_{1,0}} = \frac{1 - \gamma}{1 - \alpha},$$

$$\frac{1 - \pi_{1,1}}{1 - \pi_{1,0}} = \frac{1 - \alpha\gamma}{1 - \alpha}.$$

Daí,

$$\gamma = \frac{1 - \pi_{1,1}}{1 - \pi_{1,0}} - \frac{1 - \pi_{0,1}}{1 - \pi_{1,0}} = \frac{\pi_{0,1} - \pi_{1,1}}{1 - \pi_{1,0}}. \quad (2.7)$$

Note agora que

$$\pi_{0,1} = \beta + (1 - \beta) \frac{\pi_{0,1} - \pi_{1,1}}{1 - \pi_{1,0}}.$$

Daí, é possível concluir que

$$\beta = \frac{\pi_{1,1} - \pi_{0,1}\pi_{1,0}}{1 - \pi_{1,0} - \pi_{0,1} + \pi_{1,1}}. \quad (2.8)$$

Substituindo  $\beta$  em  $\pi_{1,0}$  obtemos

$$\pi_{1,0} = \frac{\pi_{1,1} - \pi_{0,1}\pi_{1,0}}{1 - \pi_{1,0} - \pi_{0,1} + \pi_{1,1}} + \left(1 - \frac{\pi_{1,1} - \pi_{0,1}\pi_{1,0}}{1 - \pi_{1,0} - \pi_{0,1} + \pi_{1,1}}\right) \alpha,$$

e resolvendo em  $\alpha$ , chegamos em

$$\alpha = \frac{\pi_{1,0} - \pi_{1,1}}{1 - \pi_{0,1}}. \quad (2.9)$$

Para finalizar a demonstração é necessário checar que se  $\alpha, \beta, \gamma$  são definidos por (2.7), (2.8) e (2.9), tem-se

$$0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1.$$

Que  $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$  é evidente. Provemos que  $\alpha \leq 1$ :

$$\pi_{1,0} - \pi_{1,1} \leq 1 - \pi_{0,1}$$

↓

$$1 - \pi_{0,1} - \pi_{1,0} \geq -\pi_{1,1}$$

↓

$$1 - \pi_{0,1} - \pi_{1,0} + \pi_{0,1}\pi_{1,0} \geq \pi_{0,1}\pi_{1,0} - \pi_{1,1}$$

↓

$$(1 - \pi_{0,1})(1 - \pi_{1,0}) \geq \pi_{0,1}\pi_{1,0} - \pi_{1,1}.$$

Note, por outro lado que

$$(1 - \pi_{0,1}) \geq 0, (1 - \pi_{1,0}) \geq 0,$$

logo

$$(1 - \pi_{0,1})(1 - \pi_{1,0}) \geq 0,$$

já

$$\pi_{1,1} \geq \pi_{0,1}\pi_{1,0} \Rightarrow \pi_{0,1}\pi_{1,0} - \pi_{1,1} \leq 0,$$

logo

$$(1 - \pi_{0,1})(1 - \pi_{1,0}) \geq 0 \geq \pi_{0,1}\pi_{1,0} - \pi_{1,1}.$$

Portanto  $\alpha \leq 1$ .

Provemos agora que  $\gamma \leq 1$ :

$$\pi_{0,1} - \pi_{1,1} \leq 1 - \pi_{1,0}$$

$\Downarrow$

$$1 - \pi_{0,1} - \pi_{1,0} \geq -\pi_{1,1}$$

que é a mesma desigualdade estudada no caso anterior, logo  $\gamma \leq 1$ .

Provemos agora que  $\beta \leq 1$ :

$$\pi_{1,1} - \pi_{0,1}\pi_{1,0} \geq 1 - \pi_{0,1} - \pi_{1,0} + \pi_{1,1}$$

$\Downarrow$

$$-\pi_{0,1}\pi_{1,0} \geq 1 - \pi_{0,1} - \pi_{1,0}$$

$\Downarrow$

$$1 - \pi_{0,1} - \pi_{1,0} + \pi_{0,1}\pi_{1,0} \geq 0$$

$\Downarrow$

$$(1 - \pi_{0,1})(1 - \pi_{1,0}) \geq 0, \quad \text{logo} \quad \beta \leq 1.$$

Falta estudarmos os casos em que os denominadores são iguais a zero:

Seja  $\pi_{1,0} = 1$ , então,

$$\beta + (1 - \beta)\gamma = \pi_{0,1}, \quad \beta + (1 - \beta)\alpha = 1, \quad \beta + (1 - \beta)\alpha\gamma = \pi_{1,1}.$$

Portanto,

$$1 - \pi_{0,1} = (1 - \beta)(1 - \gamma), \quad 0 = (1 - \beta)(1 - \alpha), \quad 1 - \pi_{1,1} = (1 - \beta)(1 - \alpha\gamma).$$

Caso 1:  $\beta = 1$ ,

$\pi_{0,1} = \pi_{1,0} = \pi_{1,1} = 1$ , e  $\alpha, \gamma$  podem ser quaisquer pois  $\beta = 1$  fecha tudo.

Caso 2:  $\alpha = 1$ ,

$1 - \pi_{0,1} = (1 - \beta)(1 - \gamma) = 1 - \pi_{1,1}$ , assim  $\pi_{0,1} = \pi_{1,1}$ , e podemos supor  $\pi_{0,1} < 1$ , assim o conjunto de pares  $(\beta, \gamma)$  é infinito sob a única condição de que  $(1 - \beta)(1 - \gamma) = 1 - \pi_{0,1}$ .

Por fim, consideremos o caso onde  $1 - \pi_{1,0} - \pi_{0,1} + \pi_{1,1} = 0$ .

$$(1 - \pi_{1,0} - \pi_{0,1} + \pi_{1,0}\pi_{0,1}) + (\pi_{1,1} - \pi_{1,0}\pi_{0,1}) = 0$$

↓

$$(1 - \pi_{0,1})(1 - \pi_{1,0}) + (\pi_{1,1} - \pi_{0,1}\pi_{1,0}) = 0$$

↓

$$(1 - \pi_{0,1})(1 - \pi_{1,0}) = (\pi_{0,1}\pi_{1,0} - \pi_{1,1}),$$

mas

$$(1 - \pi_{0,1})(1 - \pi_{1,0}) \geq 0 \quad \text{e} \quad (\pi_{0,1}\pi_{1,0} - \pi_{1,1}) \leq 0,$$

daí

$$(1 - \pi_{0,1})(1 - \pi_{1,0}) = 0 = \pi_{0,1}\pi_{1,0} - \pi_{1,1},$$

portanto

$$\pi_{0,1} = \pi_{1,0} = \pi_{1,1} = 1$$

que é o caso onde  $\beta = 1$ , que já foi visto.

*O Lema está demonstrado.*

## Capítulo 3

### Enunciados dos Teoremas

Para cada medida  $\mu$  e eventos  $A$  e  $B$ , considere

$$\Delta\mu(A, B) = \mu(A \cap B) - \mu(A) \cdot \mu(B). \quad (3.1)$$

Seja a translação no espaço de configurações:  $\mathcal{T}_s : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  tal que para cada configuração  $x$ ,

$$(\mathcal{T}_s x)_i = x_{s+i}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

#### 3.1 Processo de Stavskaya

Todos os teoremas e proposições anunciados aqui serão provados na Seção 4.1.

Proposição 1 (Não-ergodicidade do PS): Se  $\beta < \frac{1}{27}$ , o processo de Stavskaya é não-ergódico, i.e.,  $\mu_{\text{inv}} \neq \delta_0$ .

Aqui, na Seção 3.1,  $\mu_{\text{inv}}$  sempre é a medida invariante não-trivial do processo de Stavskaya definida em (2.3).

Queremos provar a quase independência de cilindros finos com base na medida  $\mu_{\text{inv}}$  quando a distância entre eles tende para infinito. Então queremos mostrar que

$$\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

para todos os cilindros finos  $a$  e  $b$ .

Para demonstrar este fato, três teoremas serão demonstrados, onde o terceiro constitui a afirmação em questão. Como serão de muita utilidade os cilindros onde todos os componentes são formadas por zero, denotaremos o cilindro

$$\text{Zero}(i_1, \dots, i_n) := \{x \in \Omega : x_{i_1} = 0, \dots, x_{i_n} = 0\},$$

para  $i_1 < \dots < i_n$ . Estes cilindros, pela sua importância, recebem um nome especial, são chamados *zeros cilindros*. Neste trabalho suporemos por definição que  $\Omega$  é um zero cilindro.

O primeiro teorema a ser visto abaixo demonstra que

$$\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0,$$

quando  $a$  e  $b$  são zeros cilindros formados por um único componente. Mais formalmente:

Teorema 1: Sejam  $\beta < \frac{1}{27}$ , os zeros cilindros  $a = \text{Zero}(0)$ ,  $b = \text{Zero}(0)$ . Então para todo  $s \in \mathbb{Z}$ ,

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| < 3 \cdot \frac{(27\beta)^{|s|}}{1 - 27\beta}.$$

O segundo teorema, abaixo, é uma generalização do primeiro, em certo sentido, pois este trata agora de zeros cilindros em geral; no entanto, supomos que  $s$  é um número natural. Afirmamos, porém, que ainda assim é possível demonstrar com argumentos análogos que o mesmo resultado vale se  $s$  é um inteiro qualquer, fazendo apenas algumas modificações.

Teorema 2: Sejam  $\beta < \frac{1}{27}$ , os zeros cilindros  $a = \text{Zero}(i_1, \dots, i_n)$  e  $b = \text{Zero}(j_1, \dots, j_m)$ , onde  $i_1 < \dots < i_n$ ,  $j_1 < \dots < j_m$ . Então, para todo  $s \in \mathbb{N}$ ,

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| < [2^{(n+m)} - 1] \cdot \frac{(27\beta)^{j_1+s-i_n}}{1 - 27\beta}.$$

O terceiro teorema prova a quase independência para quaisquer cilindros finos, generalizando os dois primeiros teoremas.

Teorema 3: Consideramos o PS com  $\beta < \frac{1}{27}$ . Então, para todos os cilindros finos  $a$  e  $b$  em  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , existe um número  $C$  tal que para todo  $s \in \mathbb{N}$

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| \leq C(27\beta)^s.$$

O próximo teorema consiste em uma versão da lei dos grande números para a medida  $\mu_{\text{inv}}$  do PS.

Teorema 4: Consideramos o PS com  $\beta < \frac{1}{27}$ . Seja  $S_n = x_0 + \dots + x_{n-1}$  e  $m = \mu_{\text{inv}}(x_0 = 1)$ , daí,

$$\mu_{\text{inv}} \left( \left| \frac{S_n}{n} - m \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ou seja,  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m$ , em probabilidade.

O objetivo do próximo teorema é generalizar este resultado da lei dos grandes números. Para tanto precisamos de uma nova definição. Dizemos que uma função  $f : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$  tem base  $B \subset \mathbb{Z}$  se na realidade só depende de  $x_B$ , i.e.,  $x_B = y_B \Rightarrow f(x) = f(y)$ . Chamemos  $f$  de *local*, se  $f$  tem uma base finita. Mais ainda, consideremos a translação  $\mathcal{T}_s$ , denotamos por  $\mathcal{T}$  a translação de funções sobre  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ ,  $\mathcal{T}^s f(x) \equiv f(\mathcal{T}_s x)$ . Agora, podemos enunciar o quinto teorema e o último sobre o processo de Stavskaya.

Teorema 5: Consideramos o PS com  $\beta < \frac{1}{27}$ . Seja  $f$  função local, seja  $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{T}^i f$  e  $E(f|\mu_{\text{inv}}) = m$ , então,

$$\mu_{\text{inv}} \left( \left| \frac{S_n}{n} - m \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ou seja,  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m$ , em probabilidade.

### 3.2 Processo de Stavskaya Generalizado

Todos os teoremas e proposições anunciados aqui serão demonstrados na Seção 4.2.

A idéia é demonstrar os mesmos teoremas mencionados acima para esta nova classe de autômatos celulares, assim omitiremos demais explicações e exporemos direto os resultados.

Proposição 2 (Não-ergodicidade do PSG): Se  $\max(\alpha, \beta, \gamma) < \frac{1}{54}$ , o processo de Stavskaya generalizado é não-ergódico, i.e.,  $\mu_{\text{inv}} \neq \delta_0$ .

A partir de agora, consideramos o PSG com

$$\psi = \max(\alpha, \beta, \gamma) < \frac{1}{216},$$

logo, com medida invariante não-trivial  $\mu_{\text{inv}}$  definida em (2.5).

Teorema 6: Sejam os zeros cilindros  $a = \text{Zero}(0)$ ,  $b = \text{Zero}(0)$ . Então para todo  $s \in \mathbb{Z}$ ,

$$|\Delta \mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| < \frac{18}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{|s|}}{1 - 216\psi}.$$

Teorema 7: Sejam os zeros cilindros  $a = \text{Zero}(i_1, \dots, i_n)$  e  $b = \text{Zero}(j_1, \dots, j_m)$ , onde  $i_1 < \dots < i_n$  e  $j_1 < \dots < j_m$ . Então, para todo  $s \in \mathbb{N}$ ,

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| < \frac{6[2^{(n+m)} - 1]}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{j_1+s-i_n}}{1 - 216\psi}.$$

Teorema 8: Para todos os cilindros finos  $a$  e  $b$ , existe um número  $C$  tal que para todo  $s \in \mathbb{N}$

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| \leq C(216\psi)^s.$$

Teorema 9: Sejam  $S_n = x_0 + \dots + x_{n-1}$  e  $\mu_{\text{inv}}(x_0 = 1) = m$ , então,

$$\mu_{\text{inv}} \left( \left| \frac{S_n}{n} - m \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ou seja,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m,$$

em probabilidade.

Teorema 10: Seja  $f$  função local, seja  $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{T}^i f$  e  $E(f|\mu_{\text{inv}}) = m$ , então,

$$\mu_{\text{inv}} \left( \left| \frac{S_n}{n} - m \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ou seja,  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m$ , em probabilidade.

## Capítulo 4

### Demonstrações das Proposições e Teoremas

Agora vamos apresentar algumas definições que serão úteis durante as demonstrações dos teoremas.

Consideremos modelos de percolação orientados. Definimos um *grafo*  $G$  pelos conjuntos contáveis  $\mathcal{V}$  de vértices,  $\mathcal{E}$  de elos e duas funções  $f_0 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$  e  $f_1 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$  que associam a cada elo dois vértices, chamados seus fins. Seja  $e \in \mathcal{E}$  um elo,  $e$  conecta o vértice  $f_0(e)$  ao  $f_1(e)$ .

Um modelo *orientado* é um grafo onde cada um de seus elos pode assumir em cada direção um estado, aberto ou fechado, independentemente de qualquer outro elo e da outra direção deste mesmo elo. Os vértices estão sempre abertos.

Um *caminho* é uma seqüência do tipo “vértice - elo - vértice - elo  $\cdots$  - elo - vértice” que pode ser *finita* se esta seqüência for finita, *infinita* se esta seqüência for infinita em apenas um sentido ou *bi-infinita* se esta seqüência for infinita nos dois sentidos.

Um caminho é dito *auto-evitante* se todos os vértices em sua seqüência são diferentes. Um caminho num grafo orientado está *aberto* numa certa direção, se todos os seus elos estão abertos nessa direção.

Um grafo  $G$  é dito *conectado* se para quaisquer dois vértices de  $G$  existir um caminho conectando-os.

Um *contorno* é um caminho finito e auto-evitante, com exceção dos pontos inicial e final que coincidem. Num grafo não-orientado, um contorno está aberto se todos os seus elos estão abertos. Num grafo orientado, um contorno está aberto numa direção se todos os seus elos estão abertos nessa direção.

Dizemos que existe *percolação* de um vértice  $\alpha$  até um vértice  $\beta$ , se existe um caminho aberto finito conduzindo  $\alpha$  até  $\beta$ .



Dizemos que um grafo  $G$  está inserido no  $\mathbb{R}^2$  se satisfaz as seguintes condições:

1. Cada vértice  $v$  de  $G$  está associado a um ponto  $P(v) \in \mathbb{R}^2$ . Vértices diferentes estão associados a pontos diferentes. Denotamos por  $P(\mathcal{V})$  o conjunto de pontos  $\{P(v)|v \in \mathcal{V}\}$ .
2. Cada elo  $e$  de  $G$  está representado por uma única curva poligonal. Esta curva é auto-evitante, exceto quando  $e$  é um *laço*.
3. Dentro de cada subconjunto limitado do plano há apenas um número finito de representações de vértices.
4. Se  $e_i \neq e_j$  são dois elos diferentes, então são representados por curvas poligonais distintas.

Dizemos que dois grafos conectados  $G$  e  $G'$  são *duais* se existe uma correspondência 1-a-1 entre os elos de  $G$  e de  $G'$  chamada *dualidade* tal que cada elo de cada grafo cruza o seu elo dual do seu grafo dual num único ponto. Elos de  $G$  e de  $G'$  não duais não têm pontos comuns. Observe que a relação de dualidade é simétrica, i.e., se  $G'$  é dual de  $G$ , então  $G$  é dual de  $G'$ .

Considere  $(G, G')$  grafos duais e orientados. A relação entre direções dos seus elos obedece a seguinte regra: Dados elos duais  $e$  e  $e'$ , para cada direção de  $e$ , a direção de  $e'$  correspondente é a direção da direita para esquerda quando percorremos  $e$  na direção indicada. Todo elo do grafo  $G'$  está aberto numa certa direção se e somente se o elo correspondente do grafo  $G$  está fechado na direção correspondente.

Teorema (Dualidade): Seja  $(G, G')$  um par de grafos duais, finitos, orientados, satisfazendo a regra para grafos duais e orientados. Não há percolação do vértice  $\alpha$  para o vértice  $\beta$ , no grafo  $G$ , se e somente se, em  $G'$ , há um contorno auto evitante, aberto numa direção tal que sua representação, no plano, deixa o ponto  $P(\alpha)$  à esquerda e  $P(\beta)$  à direita.

O teorema enunciado acima vai ser aplicado nas demonstrações de alguns de nossos teoremas e sua demonstração pode ser encontrada em [LT.2002].

## 4.1 Processo de Stavskaya

Seja  $\bar{\Omega} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_+}$  espaço de  $2-D$  configurações de estados de componentes. Denotamos  $\omega \in \bar{\Omega}$  os elementos de  $\bar{\Omega}$  e chamamos eles de  $2-D$  configurações. Denotamos  $\omega_i^t$  cada componente da configuração  $\omega$ , onde  $t \in \mathbb{Z}_+$  e  $i \in \mathbb{Z}$ .

Seja  $\Lambda = \{0, 1\}^{\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_+}$  espaço de  $2-D$  configurações de estados de variáveis auxiliares. Denotamos  $\lambda \in \Lambda$  os elementos de  $\Lambda$  e  $\lambda_i^t$  componentes em  $\lambda$ .

Seja  $\theta$  medida em  $\Lambda$  tal que todas as componentes  $\lambda_i^t$  são v.a. i.i.d. e

$$\theta : \lambda_i^t = \begin{cases} 1 & \text{com probabilidade } \beta \\ 0 & \text{com probabilidade } 1 - \beta. \end{cases}$$

Obtemos então uma distribuição em  $\bar{\Omega}$ , induzida pela medida  $\theta$  em  $\Lambda$ , definida indutivamente por base de indução

$$\forall i, \omega_i^0 \equiv 1$$

e passo de indução

$$\omega_i^{t+1} = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda_i^{t+1} = 1 \\ \max(\omega_i^t, \omega_{i+1}^t), & \text{c.c.} \end{cases},$$

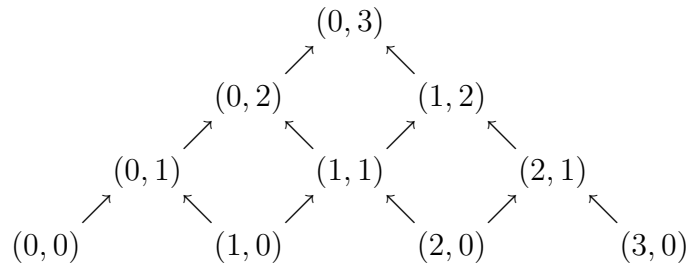
para  $t = 0, 1, 2, \dots$

Faremos então uma interpretação do processo de Stavskaya como percolação.

Podemos observar que a presença de uma partícula no ponto  $i$  no tempo  $t$ , depende unicamente do que acontece no triângulo

$$\{(j, k) : i \leq j \leq i + t - k\},$$

onde o par ordenado  $(j, k)$  representa a posição e o tempo respectivamente. A Figura 1, a seguir, mostra este triângulo para  $i = 0$  e  $t = 3$ . (O eixo do tempo é inclinado para o esquema ficar simétrico.)

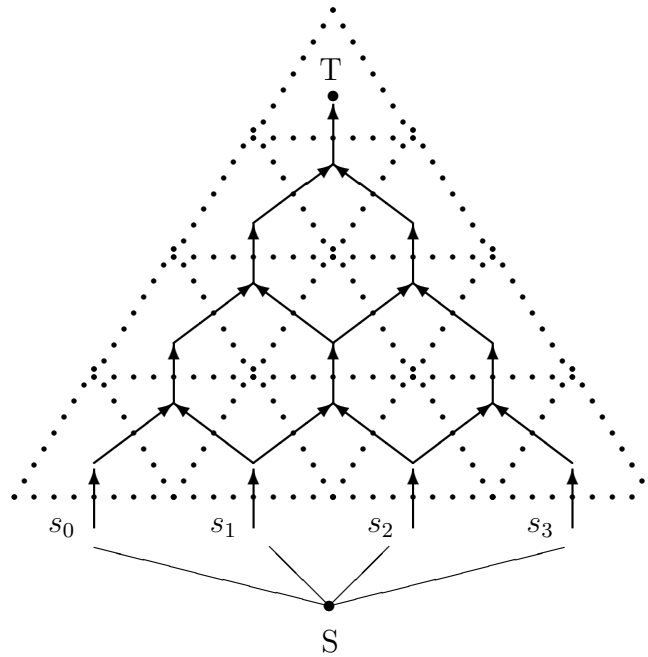


**Figura 1.** *O triângulo no qual o estado do ponto 0 no tempo 3 depende no processo de Stavskaya.*

A Figura 1 mostra parte do grafo de percolação para o PS, relativo ao estado do ponto 0 no tempo 3. Neste grafo, os elos estão sempre abertos para cima e fechados para baixo. Os vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$  e  $(3, 0)$  estão sempre abertos. Os outros vértices estão abertos com probabilidade  $1 - \beta$  e fechados com probabilidade  $\beta$  independentemente uns dos outros. Existe uma partícula no ponto 0 no tempo 3 se e somente se existir um caminho aberto neste grafo, de alguns dos vértices  $(i, 0)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , até o vértice  $(0, 3)$ .

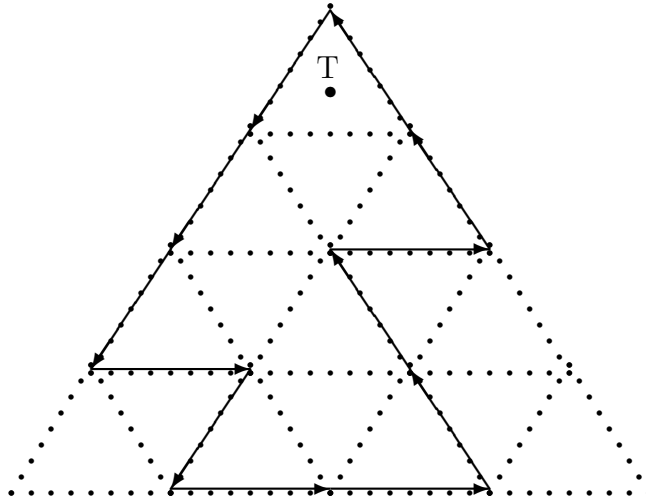
Porém é melhor alongar cada vértice, transformando assim percolação de vértice em percolação de elo, como mostra a Figura 2.

Imaginemos que os quatro vértices denotados por  $s_0, s_1, s_2, s_3$  na Figura 2 são fontes de líquido e que as setas são tubos orientados que podem conduzir este líquido para cima, mas não para baixo. As setas inclinadas sempre estão abertas, mas as setas verticais podem estar abertas ou fechadas, porque elas imitam o nosso operador aleatório: cada uma delas está fechada com probabilidade  $\beta$  e aberta com probabilidade  $1 - \beta$ . Assim, reduzimos um problema sobre o nosso processo aleatório a um problema sobre percolação.



**Figura 2.** *Processo de Stavskaya como percolação. A presença de uma partícula no ponto  $(0,3)$  equivale a percolação no grafo apresentado por linhas contínuas da fonte  $S$  para o objetivo  $T$ . As linhas pontilhadas mostram o grafo dual.*

Porém, é melhor ter somente uma fonte. Por esta razão introduziremos um vértice especial  $S$ , conectado por elos com  $s_0, s_1, s_2, s_3$ . Assumiremos que estes elos sempre estão abertos em ambas as direções. Dessa forma, os elos duais sempre estão fechados em ambas as direções e por isso não precisaremos desenhá-los. Pela mesma razão é conveniente assumir que os elos verticais do grafo original sempre estão abertos para baixo. Isto não cria nenhum problema se os elos inclinados sempre estão fechados para baixo. Então os elos do grafo dual estão abertos como segue: os elos direcionados  $\swarrow$  e  $\nwarrow$  estão sempre abertos nestes sentidos e sempre fechados nos sentidos opostos; os elos direcionados  $\rightarrow$  estão abertos neste sentido com probabilidade  $\beta$  e sempre estão fechados na sentido oposto.



**Figura 3.** O grafo dual do processo de Stavskaya. As setas contínuas mostram um contorno cercando  $T$ . A existência de um contorno aberto cercando  $T$  na direção positiva equivale à ausência de partícula no ponto  $0$ , no tempo  $3$ , dentro do processo.

Concentramos nossa atenção no grafo dual apresentado na Figura 3. Podemos observar que, de acordo com o Teorema de dualidade enunciado no início deste capítulo, não há percolação no grafo original se há um contorno aberto no grafo dual correspondente cercando  $T$  e indo na direção positiva (no sentido anti-horário). Assumiremos que todo contorno começa e termina no ponto mais alto. A probabilidade de que exista tal contorno não excede

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \beta^k,$$

onde  $C_k$  é o número de tais contornos que possuem  $k$  obstáculos, correspondendo a  $k$  passos horizontais. Todo contorno tem número de passos iguais em suas três direções, dessa forma tem  $3k$  passos. Como cada passo de um contorno tem somente três possíveis direções,  $C_k \leq 3^{3k}$  e, então, a probabilidade de que exista uma partícula no local  $0$  num tempo  $t$  qualquer não excede

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^{3k} \cdot \beta^k = \frac{27\beta}{1 - 27\beta}, \text{ se } \beta < \frac{1}{27}.$$

A idéia da obtenção dessa estimativa será importante para a demonstração dos teoremas.

### 4.1.1 Demonstração da Proposição 1

Afirmção 1: Seja  $P$  um operador e  $\mu$  uma medida. Se o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t \mu$  existe, então este limite é invariante para  $P$ .

A demonstração é evidente e omitiremos.

Sejam  $x, y \in \Omega$ , dizemos que  $x$  precede  $y$ , denotado por  $x \prec y$ , se  $x_i \leq y_i$  para todo  $i$  em  $S$ . Dizemos que um conjunto  $U \in \mathcal{A}$  é superior se

$$(x \in U, x \prec y) \Rightarrow y \in U.$$

Introduzimos uma ordem parcial em  $\mathcal{M}$ : uma medida normalizada  $\mu$  precede  $\nu$  se  $\mu(U) \leq \nu(U)$ , para qualquer  $U$  conjunto superior. Chamamos um operador  $P$  de *monótono* se  $\mu \prec \nu$  implicar  $P\mu \prec P\nu$ . Também dizemos que o operador  $P_1$  precede o operador  $P_2$  se  $P_1\mu \prec P_2\mu$  para qualquer medida  $\mu$ .

Afirmção 2: Se  $P$  é monótono, então as sequências  $P^t \delta_0$  e  $P^t \delta_1$  convergem.

Demonstração: É fácil provar por indução que

$$\delta_0 \prec P\delta_0 \prec P^2\delta_0 \prec \dots \quad \text{e} \quad \delta_1 \succ P\delta_1 \succ P^2\delta_1 \succ \dots.$$

Em todos os casos a primeira desigualdade é evidente pois  $\delta_0 \prec \mu \prec \delta_1$  para qualquer medida  $\mu$  e todas as outras desigualdades seguem desta. Assim para qualquer conjunto superior  $U$  as sequências  $P^t \delta_0(U)$  e  $P^t \delta_1(U)$  são monótonas e então todas elas tem um limite. Agora tome um cilindro fino qualquer  $c$  e denote

$$\bar{c} = \{x \mid \exists y \in c : y \prec x\} \quad \text{e} \quad \bar{c}' = \bar{c} \setminus c.$$

É fácil mostrar que  $\bar{c}$  e  $\bar{c}'$  são conjuntos superiores, assim os valores de  $P^t \delta_0$  e  $P^t \delta_1$  para estes conjuntos têm limites. Então seus valores para  $c$  também têm limite o que indica que estas medidas têm limite. A *Afirmção 2* está demonstrada.

Afirmção 3: Se existe  $n$ , e existe  $C < 1$  tal que  $\forall t, (P^t \delta_1)(Zero(1, \dots, n)) \leq C$ , então  $P^t \delta_1$  não converge para a medida  $\delta_0$ .

A demonstraçãõ dessa afirmaçãõ é evidente.

Para mostrar a monotonicidade considere a seguinte afirmaçãõ:

Afirmaçãõ 4: Seja operador  $P$  definido por (2.1),  $V(i) = \{i, i+1\}$  e  $\pi_i$  dependendo apenas da posiçãõ  $i$ , entãõ  $P$  é monótono se e somente se

$$(x \prec y) \Rightarrow \pi_i(1 \mid x_{V(i)}) \leq \pi_i(1 \mid y_{V(i)}).$$

Demonstraçãõ: Basta utilizar o Teorema demonstrado no livro [T.2001], página 81.

A verificaçãõ de que o operador de Stavskaya é monótono é trivial, se utilizarmos a Afirmaçãõ 4, pois, basta ver que  $\forall x$

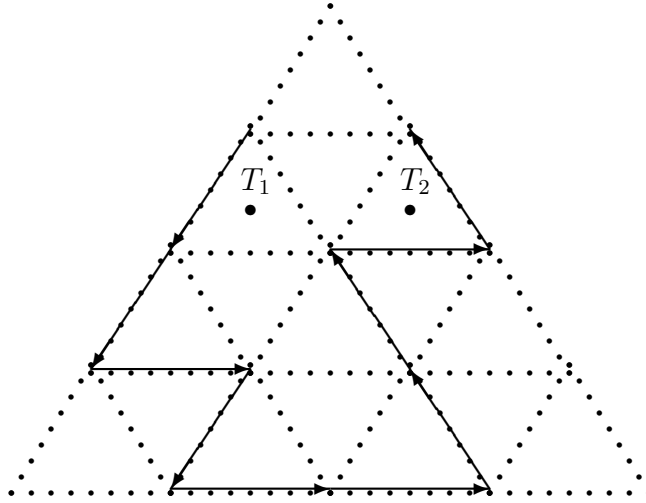
$$\pi_i(1 \mid x_i = x_{i+1} = 0) = 0,$$

$$\pi_i(1 \mid x_i = 1, x_{i+1} = 0) = \pi_i(1 \mid x_i = 0, x_{i+1} = 1) = \pi_i(1 \mid x_i = x_{i+1} = 1) = 1 - \beta.$$

Como provamos, o operador de Stavskaya é monótono, e, portanto, pela Afirmaçãõ 2, a sequênciã  $(R_\beta D)^t \delta_1$  converge para uma medida  $\mu$ . Pela Afirmaçãõ 1 temos que  $\mu$  é invariante. Precisamos mostrar que  $\mu \neq \delta_0$ .

Observamos que a nãõ existênciã de partículas nas posições  $1, \dots, n$  no instante  $t$  é o mesmo que existir uma cerca no grafo dual começando em cima de  $T_1$  e terminando em cima de  $T_n$ , onde  $T_1$  até  $T_n$  sãõ os topos de  $n$  triângulos como os triângulos  $T_1$  e  $T_2$  apresentados na Figura 5, na página 28. A Figura 4, na página seguinte, ilustra uma cerca deste tipo. Seja  $k$  o número de passos à direita; é claro que como temos  $n$  partículas,  $k \geq n$ , mais ainda, é possível notar que o número de passos para baixo é igual ao número de passos para cima, e esse número é igual a  $k - n + 1$ . Assim,

$$((R_\beta D)^t \delta_1)(Zero(1, \dots, n)) \leq \sum_{k=n}^{\infty} 3^{3k-2n+2} \beta^k = \frac{9(3\beta)^n}{1-27\beta}.$$



**Figura 4.** O grafo dual do processo de Stavskaya. As setas contínuas mostram uma cerca através de  $T_1$  e  $T_2$ . A existência de uma cerca aberta através de  $T_1$  e  $T_2$  na direção positiva equivale à ausência de partículas nos pontos 1 e 2, no tempo 3, dentro do processo.

Como  $\frac{9(3\beta)^n}{1-27\beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , então é possível concluir que sempre existe  $n$  tal que  $\frac{9(3\beta)^n}{1-27\beta} < 1$ . Daí aplicando a Afirmação 3, podemos concluir que se  $\beta < \frac{1}{27}$ , então o processo de Stavskaya é não-ergódico.

#### 4.1.2 Demonstração do Teorema 1

Lema 1: Em qualquer espaço amostral sejam os eventos  $A$  e  $B$ , onde  $A = A_1 \cup A_2$  e  $B = B_1 \cup B_2$ . Suponha  $A_1$  independente de  $B_1$ ,  $\mu(A_2) < \varepsilon$  e  $\mu(B_2) < \varepsilon$ . Então,

$$|\Delta\mu(A, B)| < 3\varepsilon,$$

onde  $\Delta$  é definida em (3.1).

Demonstração do Lema 1: Inicialmente podemos considerar que

$$\begin{aligned} \mu(A \cap B) &= \mu((A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2)) \\ &= \mu((A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_2)) \end{aligned}$$



Podemos observar que a probabilidade do cilindro  $(A_2 \cap B_1)$  é menor que  $\varepsilon$ , uma vez que  $\mu(A_2) < \varepsilon$ . Da mesma forma, as probabilidades dos cilindros  $(A_1 \cap B_2)$  e  $(A_2 \cap B_2)$  não ultrapassam  $\varepsilon$ , cada uma. E assim temos que a probabilidade da união destes três cilindros não ultrapassará  $3\varepsilon$ . Logo,

$$\mu(A_1 \cap B_1) \leq \mu(A \cap B) \leq \mu(A_1 \cap B_1) + 3\varepsilon.$$

Da desigualdade acima obtemos que

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A_1 \cap B_1)| < 3\varepsilon. \quad (4.1)$$

Como  $A_1 \subset A$ , então  $\mu(A_1) \leq \mu(A)$ . Analogamente,  $B_1 \subset B$  e  $\mu(B_1) \leq \mu(B)$ . Assim podemos estimar uma cota inferior para  $\mu(A) \cdot \mu(B)$ , que será dada por

$$\mu(A_1) \cdot \mu(B_1) \leq \mu(A) \cdot \mu(B).$$

Consideremos agora que

$$\begin{aligned} \mu(A) \cdot \mu(B) &= \mu(A_1 \cup A_2) \cdot \mu(B_1 \cup B_2) \\ &\leq (\mu(A_1) + \mu(A_2)) \cdot (\mu(B_1) + \mu(B_2)) \\ &= \mu(A_1) \cdot \mu(B_1) + \mu(A_1) \cdot \mu(B_2) + \mu(A_2) \cdot \mu(B_1) + \mu(A_2) \cdot \mu(B_2). \end{aligned}$$

Das parcelas da soma acima podemos observar que  $\mu(A_1) \cdot \mu(B_2)$  não excede  $\varepsilon$ , uma vez que  $\mu(B_2) < \varepsilon$ . Analogamente  $\mu(A_2) \cdot \mu(B_1)$  não ultrapassa  $\varepsilon$  pois  $\mu(A_2) < \varepsilon$ . Obtemos também que  $\mu(A_2) \cdot \mu(B_2)$  é menor que  $\varepsilon$  pois ambas probabilidades são menores. Logo, podemos ter  $3\varepsilon$  como uma estimativa para o limite superior da soma destas três últimas parcelas. Dessa forma

$$\mu(A_1) \cdot \mu(B_1) \leq \mu(A) \cdot \mu(B) \leq \mu(A_1) \cdot \mu(B_1) + 3\varepsilon.$$

Como no caso anterior, obtemos, da desigualdade acima, que

$$|\mu(A) \cdot \mu(B) - \mu(A_1) \cdot \mu(B_1)| < 3\varepsilon.$$

Entretanto sabemos que  $A_1$  e  $B_1$  são independentes e assim,

$$\mu(A_1 \cap B_1) = \mu(A_1) \cdot \mu(B_1).$$

Sendo assim

$$|(\mu(A) \cdot \mu(B) - \mu(A_1 \cap B_1))| < 3\varepsilon. \quad (4.2)$$

E dessa forma, por (4.1) e (4.2), podemos concluir que

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A) \cdot \mu(B)| = \Delta\mu(A, B) < 3\varepsilon.$$

O Lema 1 está demonstrado.

Agora vamos demonstrar o Teorema 1. Aqui suporemos  $s \in \{0, 1, \dots\}$ , pois o caso em que  $s \in \{\dots, -2, -1\}$  é análogo, portanto a demonstração pode ser omitida.

Consideremos agora dois importantes eventos com base no processo de Stavskaya. Aqui, consideraremos inicialmente o tempo finito e depois tomaremos o limite, assim considere

$$\mu_t = (R_\beta D)^t \delta_1,$$

e o evento  $E_0 = \{x_0 = 0\}$  significando que no instante de tempo  $t$  não existe nenhuma partícula no ponto 0 do processo. Analogamente, considere o evento  $E_s = \{x_s = 0\}$  significando que no instante  $t$  e no ponto  $s$  do processo não existe nenhuma partícula.

Note que em  $\mu_{inv}$  o tempo  $t$  foi para infinito, então o evento  $E_0$  continua sendo o cilindro  $Zero(0)$  e o evento  $E_s$  continua sendo o cilindro  $Zero(s)$ , assim para demonstrar o Teorema 1 basta provar que

$$\Delta\mu_{inv}(E_0, E_s) < 3 \cdot \frac{(27\beta)^s}{1 - 27\beta}.$$

Consideremos somente contornos descritos no início da Seção 4.1, com passos de três tipos:  $\rightarrow$ ,  $\nearrow$  e  $\swarrow$ . Definimos *comprimento* de um contorno como sendo o número de passos à direita. Consideraremos que o evento  $E_0$  ocorrerá se existir um contorno no grafo dual no espaço delimitado pelo triângulo  $T_1$ , do tipo apresentado na Figura 5. Considere também que  $E_0 = E_0^1 \cup E_0^2$ , onde  $E_0^1$  significa que existe um contorno no grafo dual com comprimento menor que  $s$  e  $E_0^2$  significa que existe um contorno no grafo dual com comprimento maior ou igual a  $s$ . De forma similar, o evento  $E_s$  ocorrerá se existir um contorno no grafo dual no espaço delimitado pelo triângulo  $T_2$ , do tipo também apresentado na Figura 5. Considere agora que  $E_s = E_s^1 \cup E_s^2$ , onde  $E_s^1$  significa que existe um contorno no grafo dual com comprimento menor que  $s$  e  $E_s^2$  significa que existe um contorno no grafo dual com comprimento maior ou igual a  $s$ .

Através da Figura 5, é fácil observar que os eventos  $E_0^1$  e  $E_s^1$  são independentes, pois a existência de uma cerca em  $T_1$  de comprimento menor que  $s$  não possui nenhuma relação com a existência de uma cerca de comprimento menor que  $s$  em  $T_2$  e vice-versa. Como em  $E_0^2$  e em  $E_s^2$  os contornos têm pelo menos  $s$  passos à direita, obtemos

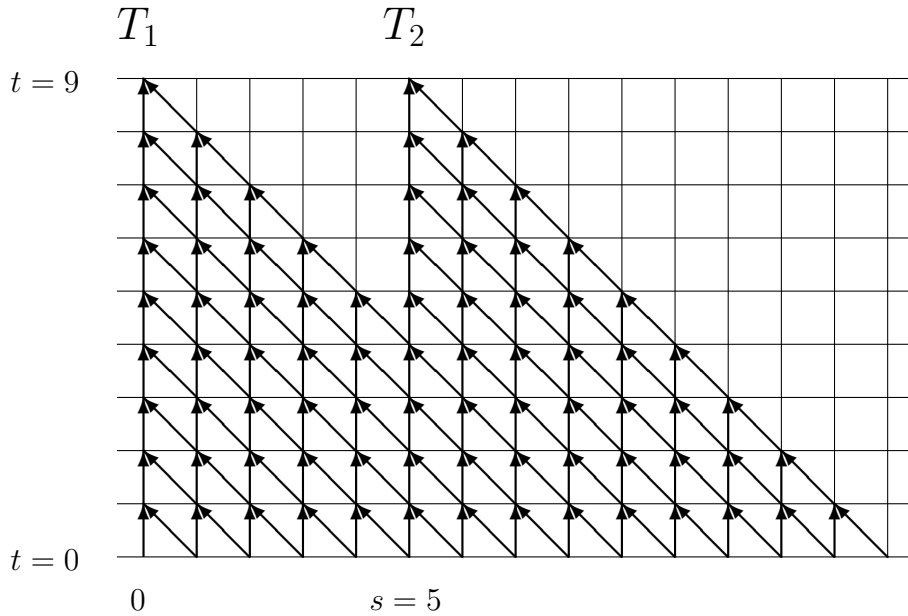
$$\mu_t(E_0^2) = \mu_t(E_s^2) < \sum_{k=s}^{\infty} 3^{3k} \beta^k = \frac{(27\beta)^s}{1 - 27\beta}.$$

Sendo assim, podemos aplicar o Lema 1 para os eventos  $E_0$  e  $E_s$  e obtemos que

$$|\Delta\mu_t(E_0, E_s)| < 3 \cdot \frac{(27\beta)^s}{1 - 27\beta}.$$

É possível mostrar que para  $s$  negativo,

$$|\Delta\mu_t(E_0, E_s)| < 3 \cdot \frac{(27\beta)^{-s}}{1 - 27\beta}.$$



**Figura 5.** *Ilustra os PS e PSG para que nos pontos  $(0, 9)$  e  $(6, 9)$  existam partículas. Na figura apresentada, as linhas horizontais representam cada passo de tempo, os vértices com as linhas verticais representam os estados das partículas e as setas suas possíveis trajetórias. O triângulo  $T_1$  é definido ligando os pontos estabelecidos pelos pontos  $(0, 0)$ ,  $(0, 9)$  e  $(9, 0)$ . O triângulo  $T_2$  é definido fazendo a ligação dos pontos  $(5, 0)$ ,  $(5, 9)$  e  $(14, 0)$ .*

Agora tomando o limite de  $t \rightarrow \infty$ , e sabendo que  $\mu_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mu_{inv}$ , concluímos que que

$$|\Delta\mu_{inv}(E_0, E_s)| < 3 \cdot \frac{(27\beta)^{|s|}}{1 - 27\beta}.$$

*O Teorema 1 está demonstrado.*

### 4.1.3 Demonstração do Teorema 2

Antes de demonstrar o Teorema 2 verifiquemos o seguinte lema:

Lema 2: Seja a medida  $\mu$  em qualquer espaço amostral e sejam os eventos  $A$  e  $B$ , onde

$$A = (A_1^1 \cup A_1^2) \cap (A_2^1 \cup A_2^2) \cap \dots \cap (A_n^1 \cup A_n^2)$$

e

$$B = (B_1^1 \cup B_1^2) \cap (B_2^1 \cup B_2^2) \cap \dots \cap (B_m^1 \cup B_m^2).$$

Em que todo  $A_i^1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , é independente de todo  $B_j^1$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Se tivermos também

$$\mu(A_i^2) < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad \mu(B_j^2) < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, m,$$

então:

$$|\Delta\mu(A, B)| < (2^{(n+m)} - 1)\varepsilon.$$

Demonstração do Lema 2: Inicialmente podemos tomar a probabilidade da interseção dos eventos  $A$  e  $B$ , que equivale a probabilidade da interseção de  $n + m$  uniões de subeventos, dadas como segue:

$$\mu(A \cap B) = \mu((A_1^1 \cup A_1^2) \cap \dots \cap (A_n^1 \cup A_n^2) \cap (B_1^1 \cup B_1^2) \cap \dots \cap (B_m^1 \cup B_m^2)).$$

É possível mostrar que

$$(A_1^1 \cup A_1^2) \cap \dots \cap (A_n^1 \cup A_n^2) \cap (B_1^1 \cup B_1^2) \cap \dots \cap (B_m^1 \cup B_m^2)$$

pode ser representado como uniões de  $2^{n+m}$  conjuntos com a forma

$$A_1^{i_1} \cap \dots \cap A_n^{i_n} \cap B_1^{j_1} \cap \dots \cap B_m^{j_m},$$

$i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}, j_1, \dots, j_m \in \{1, 2\}$ . Dessas uniões apenas o conjunto

$$(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1 \cap B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1)$$

não envolve nenhum termo cuja probabilidade é menor que  $\varepsilon$ , assim, temos que a probabilidade de  $2^{n+m} - 1$  delas é menor que  $\varepsilon$ . Desse fato, decorre que

$$\mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1 \cap B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1) \leq \mu(A \cap B) \leq \mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1 \cap B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1) + [2^{(n+m)} - 1]\varepsilon.$$

Da desigualdade acima obtemos que

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1 \cap B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1)| < [2^{(n+m)} - 1]\varepsilon. \quad (4.3)$$

Vamos observar o que ocorre com  $\mu(A) \cdot \mu(B)$ , no intuito de obtermos uma cota inferior. É claro que  $(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1) \subset A$ , daí  $\mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1) \leq \mu(A)$ . Analogamente, obtemos que  $(B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1) \subset B$  e  $\mu(B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1) \leq \mu(B)$ . Com isso, temos que

$$\mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1) \cdot \mu(B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1) \leq \mu(A) \cdot \mu(B).$$

Para encontrar uma cota superior, consideraremos o fato de que a probabilidade da união de eventos é menor ou igual à soma das probabilidades de cada um. Utilizando este fato, e a idéia anterior, temos que

$$\begin{aligned} \mu(A) \cdot \mu(B) &= \mu((A_1^1 \cup A_1^2) \cap \dots \cap (A_n^1 \cup A_n^2)) \cdot \mu((B_1^1 \cup B_1^2) \cap \dots \cap (B_m^1 \cup B_m^2)) \\ &< [\mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1) + (2^n - 1)\varepsilon] \cdot [\mu(B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1) + (2^m - 1)\varepsilon] \\ &= \mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1) \cdot \mu(B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1) + \mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1) \cdot (2^m - 1)\varepsilon \\ &\quad + \mu(B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1) \cdot (2^n - 1)\varepsilon + (2^n - 1)(2^m - 1)\varepsilon^2 \\ &< \mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1) \cdot \mu(B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1) + (2^m - 1)\varepsilon + (2^n - 1)\varepsilon \\ &\quad + (2^n - 1)(2^m - 1)\varepsilon \\ &= \mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1) \cdot \mu(B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1) + (2^{n+m} - 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1) \cdot \mu(B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1) &\leq \mu(A) \cdot \mu(B) \leq \\ \mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1) \cdot \mu(B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1) &+ [2^{(n+m)} - 1]\varepsilon. \end{aligned}$$

Da desigualdade acima, obtemos que

$$|\mu(A) \cdot \mu(B) - \mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1) \cdot \mu(B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1)| < [2^{(n+m)} - 1]\varepsilon. \quad (4.4)$$

Entretanto, sabemos que todo  $A_i^1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , é independente de todo  $B_j^1$ ,  $j = 1, \dots, m$  e assim  $(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1)$  e  $(B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1)$  são independentes. Com isso,

$$\mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1 \cap B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1) = \mu(A_1^1 \cap \dots \cap A_n^1) \cdot \mu(B_1^1 \cap \dots \cap B_m^1).$$

Dessa forma, por (4.3) e (4.4) concluímos que

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A) \cdot \mu(B)| = |\Delta\mu(A, B)| < [2^{(n+m)} - 1]\varepsilon.$$

*O Lema 2 está demonstrado.*

Aplicamos, agora, o Lema 2 para o nosso processo. Assim, considere os eventos  $E_1$  e  $E_2$ , tais que

$$E_1 = \{x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_n} = 0\}, \quad \text{com} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_n \quad \text{e}$$

$$E_2 = \{x_{j_1+s} = x_{j_2+s} = \dots = x_{j_m+s} = 0\}, \quad \text{com} \quad j_1 < j_2 < \dots < j_m.$$

Então, podemos notar que quando  $t \rightarrow \infty$  e chegamos na medida limite, o evento  $E_1$  é o cilindro fino  $Zero(i_1, \dots, i_n)$  e o evento  $E_2$  é a translação na distância  $s$  do cilindro  $Zero(j_1, \dots, j_m)$ , logo, para provar o Teorema 2 basta mostrar que

$$\Delta\mu_{inv}(E_1, E_2) < [2^{(n+m)} - 1] \cdot \frac{(27\beta)^{j_1+s-i_n}}{1 - 27\beta}.$$

Tomaremos como base para a prova a interpretação do processo de Stavskaya como percolação. Neste sentido, consideraremos  $n$  triângulos, denotados por  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , e  $m$  triângulos denotados por  $U_1, U_2, \dots, U_m$ . Consideraremos que o evento  $E_1$  ocorrerá se existirem  $n$  contornos no grafo dual, um em cada espaço delimitado pelos triângulos  $T_w$ ,  $w = 1, \dots, n$ . Note que

$$E_1 = (E_{1,1}^1 \cup E_{1,1}^2) \cap (E_{1,2}^1 \cup E_{1,2}^2) \cap \dots \cap (E_{1,n}^1 \cup E_{1,n}^2)$$

onde  $E_{1,w}^1$ , significa que o contorno existente no grafo dual, no espaço delimitado pelo triângulo  $T_w$ , tem comprimento menor do que  $j_1 + s - i_w$  e  $E_{1,w}^2$  significa que o contorno existente no grafo dual tem comprimento maior ou igual a  $j_1 + s - i_w$ . De forma similar,

consideraremos que o evento  $E_2$  ocorrerá se existir  $m$  contornos no grafo dual, um em cada espaço delimitado pelos triângulos  $U_z$ ,  $z = 1, \dots, m$ . Note também, neste caso, que

$$E_2 = (E_{2,1}^1 \cup E_{2,1}^2) \cap (E_{2,2}^1 \cup E_{2,2}^2) \cap \dots \cap (E_{2,n}^1 \cup E_{2,n}^2)$$

onde  $E_{2,z}^1$ ,  $z = 1, \dots, m$  significa que o contorno existente no grafo dual, no espaço delimitado pelo triângulo  $U_z$ , tem comprimento menor do que  $j_z + s - i_n$  e  $E_{2,z}^2$  significa que o contorno existente no grafo dual tem comprimento maior ou igual a  $j_z + s - i_n$ .

É fácil observar, utilizando o mesmo argumento da demonstração do Teorema 1, que os eventos  $E_{1,w}^1$ ,  $w = 1, \dots, n$  e  $E_{2,z}^1$ ,  $z = 1, \dots, m$  são independentes, pois a existência de uma cerca em qualquer  $T_w$  de comprimento menor que  $j_1 + s - i_w$  não possui nenhuma relação com a existência de uma cerca em qualquer  $U_z$  de comprimento menor que  $j_z + s - i_n$ .

Por outro lado, usando a representação como percolação temos que a probabilidade de existência de uma cerca no grafo dual em  $T_w$  com comprimento maior ou igual a  $j_1 + s - i_w$  não excede

$$\mu_t(E_{1,w}^2) < \sum_{k=j_1+s-i_w}^{\infty} 3^{3k} \beta^k = \frac{(27\beta)^{j_1+s-i_w}}{1-27\beta} \leq \frac{(27\beta)^{j_1+s-i_n}}{1-27\beta}.$$

De maneira similar, a probabilidade de existência de uma cerca no grafo dual em  $U_z$  com comprimento maior ou igual a  $j_z + s - i_n$  não excede

$$\mu_t(E_{2,j}^2) < \sum_{k=j_z+s-i_n}^{\infty} 3^{3k} \beta^k = \frac{(27\beta)^{j_z+s-i_n}}{1-27\beta} \leq \frac{(27\beta)^{j_1+s-i_n}}{1-27\beta}.$$

Podemos aplicar o *Lema 2* aos eventos  $E_1$  e  $E_2$ . Neste caso, decorre que

$$|\mu_t(E_1 \cap E_2) - \mu_t(E_1) \cdot \mu_t(E_2)| < [2^{(n+m)} - 1] \cdot \frac{(27\beta)^{j_1+s-i_n}}{1-27\beta}.$$

Observamos da desigualdade acima que tomando o limite de  $t \rightarrow \infty$ , e sabendo que  $\mu_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mu_{inv}$ , concluímos que

$$|\Delta \mu_{inv}(E_1, E_2)| < [2^{(n+m)} - 1] \cdot \frac{(27\beta)^{j_1+s-i_n}}{1-27\beta}.$$

*O Teorema 2 está demonstrado*

#### 4.1.4 Demonstração do Teorema 3

Lema 3a: Todo cilindro-fino pertence à álgebra gerada por zeros-cilindros.

Demonstração do Lema 3a: A demonstração será feita por indução no número de elementos da configuração iguais a 1.

*Base de indução*: não existe nenhum elemento da configuração igual a 1. Neste caso a nossa afirmação é evidente.

*Passo de indução*: Suponha o resultado válido para todos os cilindros-finos cujo número de elementos iguais a 1 varia de 1 até  $n-1$ , queremos mostrar que o cilindro com  $n$  elementos da configuração iguais a 1 também pertence à álgebra gerada pelos zeros-cilindros.

Suponha que estamos lidando com cilindros em geral. Considere ainda que temos cilindros cujo número de componentes da configuração que são iguais a 1 varia de 0 até  $n-1$ , como para cada número fixo  $i$  de uns na configuração podemos ter vários cilindros finos. Coloquemos uma ordem nestes cilindros finos. Assim denotamos por  $a_{i,j}$  o  $j$ -ésimo cilindro que possui  $i$  componentes da configuração iguais a 1.

Daí, o cilindro fino  $a$  de base finita  $B$ , formado por  $n$  componentes da configuração iguais a 1, a saber, as componentes  $i_1, \dots, i_n$ , definindo  $D = \{i_1, \dots, i_n\}$ , é

$$a = \{x \in \Omega \mid \forall i \in D, \forall j \in B \setminus D : x_i = 1, x_j = 0\}.$$

e pode ser escrito como a diferença de conjuntos:

$$\{x \in \Omega \mid \forall j \in B \setminus D : x_j = 0\} \setminus \left( a_{0,1} \cup \bigcup_{j=1}^{C_{n,1}} a_{1,j} \cup \dots \cup \bigcup_{j=1}^{C_{n,n-1}} a_{n-1,j} \right),$$

onde  $C_{n,p}$  denota combinação de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ . Temos que para cada  $i$ , contamos com  $n$  posições disponíveis. Assim, devemos escolher  $i$  posições dentre  $n$  possíveis e isso pode ser feito de  $C_{n,i}$  maneiras. Assim como todos os cilindros finos onde a quantidade de elementos da configurações iguais a 1 varia de 1 até  $n-1$  são combinações de zeros cilindros, temos que o cilindro com  $n$  elementos da configuração iguais a 1 também pode ser escrito em termos de zeros-cilindros.

*O Lema 3a está demonstrado.*



Lema 3b: Seja  $\mu$  uma medida em qualquer espaço amostral e os eventos  $A$  e  $B$ , onde

$$A = \left( A_1 \setminus \bigcup_{i=2}^N A_i \right),$$

$A_i \subset A_1$ ,  $i = 2, \dots, N$  e  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , se  $i \neq j$ ,  $i \geq 2$ ,  $j \geq 2$ .

Se  $|\Delta\mu(A_i, B)| < \gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , então

$$|\Delta\mu(A, B)| < \sum_{i=1}^n \gamma_i.$$

Demonstração do Lema 3b: Temos que

$$\left( A_1 \setminus \bigcup_{i=2}^N A_i \right) \cap B = (A_1 \cap B) \setminus \left( \bigcup_{i=2}^N (A_i \cap B) \right)$$

daí,

$$\mu \left[ \left( A_1 \setminus \bigcup_{i=2}^N A_i \right) \cap B \right] = \mu \left[ (A_1 \cap B) \setminus \left( \bigcup_{i=2}^N (A_i \cap B) \right) \right],$$

mas como  $A_i \subset A_1$ ,  $i = 2, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} \mu \left[ (A_1 \cap B) \setminus \bigcup_{i=2}^N (A_i \cap B) \right] &= \mu(A_1 \cap B) - \mu \left( \bigcup_{i=2}^N (A_i \cap B) \right) \\ &= \mu(A_1 \cap B) - \sum_{i=2}^N \mu(A_i \cap B), \end{aligned}$$

pois  $A_1, \dots, A_n$  são disjuntos.

Aplicando o resultado acima, temos que:

$$\begin{aligned} \Delta\mu(A, B) &= \mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \\ &= \mu \left[ \left( A_1 \setminus \bigcup_{i=2}^N A_i \right) \cap B \right] - \mu \left( A_1 \setminus \bigcup_{i=2}^N A_i \right) \mu(B) \\ &= \mu(A_1 \cap B) - \mu \left( \bigcup_{i=2}^N A_i \cap B \right) - (\mu(A_1) - \mu \left( \bigcup_{i=2}^N A_i \right)) \mu(B) \\ &= \mu(A_1 \cap B) - \mu(A_1)\mu(B) - \mu \left( \bigcup_{i=2}^N (A_i \cap B) \right) + \mu \left( \bigcup_{i=2}^N A_i \right) \mu(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu(A_1 \cap B) - \mu(A_1)\mu(B) - \left( \sum_{i=2}^N \mu(A_i \cap B) \right) + \left( \sum_{i=2}^N \mu(A_i) \right) \mu(B) \\
&= \Delta\mu(A_1, B) - \left( \sum_{i=2}^N \Delta\mu(A_i, B) \right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$|\Delta\mu(A, B)| \leq |\Delta\mu(A_1, B)| + \sum_{i=2}^N |\Delta\mu(A_i, B)| < \sum_{i=1}^N \gamma_i.$$

O Lema 3b está demonstrado.

Agora vamos demonstrar o Teorema 3. A demonstração será dada em duas partes, a saber parte A e parte B. Na parte A, o interesse é mostrar que se  $a$  é um cilindro fino composto de zeros e uns e  $b$  é um zero cilindro, então existe uma constante  $C_1$  tal que

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| < C_1(27\beta)^s.$$

Já na parte B, iremos provar que dados  $a$  e  $b$  cilindros finos, existe uma constante  $C$  tal que  $|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| < C(27\beta)^s$ .

**PARTE A:** *Por indução.*

*Base de indução:* Inicialmente consideremos o caso onde  $a$  é um zero cilindro. Assim temos,

$$a = \text{Zero}(i_1, \dots, i_n), \quad i_1 < \dots < i_n$$

e

$$b = \text{Zero}(j_1, \dots, j_m), \quad j_1 < \dots < j_m.$$

Pelo Teorema 2 temos que  $\forall s \in \mathbb{Z}$

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| < [2^{(m+n-1)} - 1] \frac{(27\beta)^{j_1+s-i_n}}{1 - 27\beta},$$

logo, se tomarmos

$$C = [2^{(m+n-1)} - 1] \frac{(27\beta)^{j_1-i_n}}{1 - 27\beta},$$

temos que a base de indução é verdadeira.

*Passo de indução:* Considere o caso geral onde  $a$  é um cilindro fino de base  $B$  e conjunto de componentes  $D$ , tal que  $a$  é dado por

$$a = \{x \in \Omega \mid \forall i \in D, \forall j \in B \setminus D : x_i = 1, x_j = 0\}.$$

Assim, a indução será dada no número de elementos de  $D$ . Seja  $p$  o número de elementos de  $D$ , assim, suponha que o resultado é válido para  $p$  variando de 0 até  $n - 1$ .

Pelo Lema 3a temos que é possível escrever o cilindro  $a$  como

$$a = \{x \in \Omega \mid \forall i \in B \setminus D : x_i = 0\} \setminus \left( a_{0,1} \cup \bigcup_{j=1}^{C_{n,1}} a_{1,j} \cup \cdots \cup \bigcup_{j=1}^{C_{n,n-1}} a_{n-1,j} \right).$$

Aplicando o Teorema 2, temos que existe uma constante  $C_1$  tal que

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(\{x \in \Omega \mid \forall i \in B \setminus D : x_i = 0\}, \mathcal{T}_s b)| < C_1(27\beta)^s, \quad (4.5)$$

e, também pelo Teorema 2, existe uma constante  $C_{0,1}$  tal que

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a_{0,1}, \mathcal{T}_s b)| < C_{0,1}(27\beta)^s. \quad (4.6)$$

Utilizando a indução na segunda forma, estamos supondo que para todo  $i < n$  e todo  $j$  existe  $C_{i,j}$  tal que

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a_{i,j}, \mathcal{T}_s b)| < C_{i,j}(27\beta)^s. \quad (4.7)$$

Agora, utilizando o Lema 3b é possível concluir por (4.5), (4.6) e (4.7) que se

$$C = C_1 + C_{0,1} + \sum_{i,j} C_{i,j},$$

então

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| < C(27\beta)^s. \quad (4.8)$$

Fim da parte A.

### PARTE B:

Agora vamos demonstrar por indução que  $b$  pode ser qualquer cilindro fino.

*Base de indução:* consideremos o caso onde  $b$  é um zero cilindro. O Teorema é válido se

$$b = \text{Zero}(j_1, \dots, j_m), \quad j_1 < \cdots < j_m.$$

e o cilindro fino  $a$  é um cilindro fino qualquer. A demonstração desse fato decorre da primeira parte da demonstração deste teorema.

*Passo de indução:* Considere agora que o resultado é válido para o cilindro fino  $b$ , onde este possui  $p$ ,  $p$  variando de 1 até  $m - 1$ , elementos da configuração iguais a 1, ou seja

$$b = \{x \in \Omega \mid \forall i \in D, \forall j \in B \setminus D : x_i = 1, x_j = 0\},$$

onde  $D$  possui  $p$  elementos. Utilizando o Lema 3a podemos escrever o cilindro fino  $b$ , que tem  $m$  elementos iguais a 1, como

$$b = \{x \in \Omega \mid \forall j \in B \setminus D : x_j = 0\} \setminus \left( b_{0,1} \cup \bigcup_{j=1}^{C_{m,1}} b_{1,j} \cup \dots \cup \bigcup_{j=1}^{C_{m,m-1}} b_{m-1,j} \right).$$

De maneira similar ao resultado anterior, temos por (4.8) que existe uma constante  $B_1$  tal que

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s\{x \in \Omega \mid \forall i \in B \setminus D : x_i = 0\})| < B_1(27\beta)^s,$$

e que existe uma constante  $B_{0,1}$  tal que

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b_{0,1})| < B_{0,1}(27\beta)^s.$$

Aplicando indução na segunda forma, temos que existem constantes  $B_{i,j}$  tais que

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b_{i,j})| < B_{i,j}(27\beta)^s$$

para todo  $i < m$  e todo  $j$ . Logo, pelo Lema 3b, se  $B = B_1 + B_{0,1} + \sum_{i,j} B_{i,j}$ , então

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| < B(27\beta)^s.$$

Fim da parte B.

*O Teorema 3 está demonstrado.*

#### 4.1.5 Demonstração do Teorema 4

Lema 4a:

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \Delta\mu_{\text{inv}}(\text{Zero}(i), \text{Zero}(j)).$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_i, x_j) &= E(x_i x_j) - E(x_i)E(x_j) \\ &= \mu_{\text{inv}}(1 - x_i = 1 - x_j = 1) - \mu_{\text{inv}}(1 - x_i = 1)\mu_{\text{inv}}(1 - x_j = 1) \\ &= \mu_{\text{inv}}(x_i = x_j = 0) - \mu_{\text{inv}}(x_i = 0)\mu_{\text{inv}}(x_j = 0) \\ &= \Delta\mu_{\text{inv}}(\text{Zero}(i), \text{Zero}(j)). \end{aligned}$$

Onde a esperança é tomada sobre a medida invariante. *O Lema 4a está demonstrado.*

Lema 4b: Existe  $C \in \mathbb{R}$ , tal que  $\forall n$

$$\text{Var}(x_1 + \cdots + x_n) \leq n \cdot C.$$

Demonstração do Lema 4b: Considere inicialmente que

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_1 + \cdots + x_n) &= \text{Cov}(x_1 + \cdots + x_n, x_1 + \cdots + x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(x_i, x_j). \end{aligned}$$

Note que pelo Teorema 1

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \Delta\mu_{\text{inv}}(\text{Zero}(i), \text{Zero}(j)) \leq \frac{3(27\beta)^{|i-j|}}{1-27\beta} = \text{const} \cdot (27\beta)^{|i-j|},$$

onde  $\text{const} = \frac{3}{1-27\beta}$ . Assim, se  $q = 27\beta$ ,

$$\frac{\text{Cov}(x_i, x_j)}{\text{const}} \leq q^{|i-j|}.$$

Considere o seguinte exemplo que nos ajudará a calcular a soma:

1	$q$	$q^2$	$q^3$	$q^4$	$q^5$
$q$	1	$q$	$q^2$	$q^3$	$q^4$
$q^2$	$q$	1	$q$	$q^2$	$q^3$
$q^3$	$q^2$	$q$	1	$q$	$q^2$
$q^4$	$q^3$	$q^2$	$q$	1	$q^2$
$q^5$	$q^4$	$q^3$	$q^2$	$q$	1

Daí, temos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_1 + \cdots + x_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(x_i, x_j) \\ &= \text{const} \cdot (n + (2n-2)q + (2n-4)q^2 + \cdots + (2n - (2n-2)q^{n-1})) \\ &\leq \text{const} \cdot (n + 2nq + 2nq^2 + \cdots + 2nq^{n-1}) \\ &\leq \text{const} \cdot (n + 2n \sum_{k=1}^{\infty} q^k) \\ &= \text{const} \cdot (n + 2n \cdot \frac{q}{1-q}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \text{const} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{q}{1-q}\right) \\
&= n \cdot C
\end{aligned}$$

onde  $C = (\text{const}(1 + 2 \cdot \frac{q}{1-q}))$ , portanto o Lema 4b está demonstrado.

Pela desigualdade de Tchebyshev, como definido anteriormente considere  $S_n = x_1 + \dots + x_n$  e  $E(x_1) = m < \infty$ , e é claro que como a configuração está distribuída uniformemente, as variáveis aleatórias  $x_i, i \in \mathbb{Z}$  são identicamente distribuídas. Portanto

$$\begin{aligned}
\mu_{\text{inv}} \left( \left| \frac{S_n}{n} - m \right| > \varepsilon \right) &\leq \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} \\
&< \frac{n \cdot C}{n^2 \cdot \varepsilon^2} \\
&= \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

*O Teorema 4 está demonstrado.*

#### 4.1.6 Demonstração do Teorema 5

Lema 5a: Toda função indicadora de qualquer cilindro fino pode ser escrita como combinação linear finita de indicadoras de zeros-cilindros.

Demonstração: Se  $A$  e  $B$  são zeros-cilindros, então  $A \cap B$  também é zero cilindro. Considere também os seguintes resultados sobre as funções indicadoras:  $I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{A \cap B}$  e  $I_{A \setminus B} = I_A - I_B$  sempre que  $B \subset A$ . Assim, utilizando o Lema 3a, temos que se  $C$  é um cilindro-fino então  $C$  é pertence à álgebra gerada pelos zeros cilindros. Portanto, utilizando essas propriedades da função indicadora temos que a função indicadora de  $C$  será combinação linear de indicadoras de zeros cilindros. Assim, suponha que  $C$  depende dos zeros cilindros  $Z_i, 1 \leq i \leq n$  então  $I_C(x) = \sum_{i=1}^n a_i I_{Z_i}(x)$ , onde  $a_i \in \mathbb{Z}$ .

*O Lema 5a está demonstrado.*

Lema 5b: Toda função local é combinação linear finita de indicadores de zeros cilindros.

Demonstração: Seja  $f$  função local com base  $B$ , tal que  $B$  possui  $m$  elementos, então

$f$  depende de no máximo  $m$  componentes. Como cada componente admite apenas dois estados, a função depende de no máximo  $2^m = M$  elementos distintos. Ordenemos os cilindros finos para os quais  $f$  assume valores distintos; sabemos que existem no máximo  $M$  tais cilindros finos. Assim, seja  $C_j$  o  $j$ -ésimo cilindro fino. Assim,  $\forall x \in C_j$ , temos que  $f(x) = b_j, 1 \leq j \leq M$ . Temos que  $I_{C_j}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in C_j$ , assim,

$$f(x) = \sum_{j=1}^M b_j I_{C_j}(x).$$

Temos ainda que cada um dos  $M$  cilindros finos dos quais  $f$  depende são de base finita, portanto, pelo Lema 5a, podem ser escritos como combinações lineares finitas de zeros-cilindros, portanto:

$$f(x) = \sum_{j=1}^M b_j \sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j} I_{Z_{i,j}},$$

onde  $Z_{i,j}$  são zeros cilindros. Isto que garante que  $f$  é combinação linear finita de indicadores de zeros-cilindros.

*O Lema 5b está demonstrado.*

Lema 5c: Sejam  $I_A$  e  $I_B$  funções indicadoras de

$$A = \text{Zero}(i_1, \dots, i_n), \quad i_1 < \dots < i_n$$

e

$$B = \text{Zero}(j_1, \dots, j_m), \quad j_1 < \dots < j_m.$$

Então,  $\forall s \in \mathbb{Z}$

$$\text{Cov}(I_A, T^s I_B) \leq \frac{[2^{(n+m)} - 1] \cdot (27\beta)^p}{1 - 27\beta} (27\beta)^s,$$

onde  $p = j_1 - i_n$ .

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(I_A, T^s I_B) &= \text{E}(I_A T^s I_B) - \text{E}(I_A) \text{E}(T^s I_B) \\ &= \mu_{\text{inv}}(A \cap T^s B) - \mu_{\text{inv}}(A) \mu_{\text{inv}}(T^s B) \\ &= \Delta \mu_{\text{inv}}(A, T^s B). \end{aligned}$$

Mas pelo Teorema 2, temos que

$$\Delta\mu_{\text{inv}}(A, \mathcal{T}_s B) < [2^{(n+m)} - 1] \cdot \frac{(27\beta)^{j_1+s-i_n}}{1-27\beta}.$$

Reescrevendo a desigualdade temos que

$$\Delta\mu_{\text{inv}}(A, \mathcal{T}_s B) < [2^{(n+m)} - 1] \cdot (27\beta)^{j_1-i_n} \frac{(27\beta)^s}{1-27\beta},$$

portanto

$$\begin{aligned} \text{Cov}(I_A, \mathcal{T}^s I_B) &= \Delta\mu_{\text{inv}}(A, \mathcal{T}_s B) \\ &\leq \frac{[2^{(n+m)} - 1] \cdot (27\beta)^{j_1-i_n}}{1-27\beta} (27\beta)^s. \end{aligned}$$

O Lema 5c está demonstrado.

Lema 5d: Sejam  $f$  e  $g$  funções locais,  $\beta < \frac{1}{27}$ . Existe constante  $q \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $s \in \mathbb{Z}$

$$\text{Cov}(f, \mathcal{T}^s g) < q(27\beta)^s.$$

Demonstração: Basta decompor as funções  $f$  e  $g$  segundo o Lema 5b, assim  $f = \sum_{i=1}^n a_i I_{Z_{1,i}}$ ,  $g = \sum_{j=1}^m b_j I_{Z_{2,j}}$ , onde para todos  $i, j$ ,  $Z_{1,i} = \text{Zero}(d_1, \dots, d_{n_i})$ ,  $Z_{2,j} = \text{Zero}(h_1, \dots, h_{m_j})$ ,  $n_i, m_j \in \mathbb{N}$ ,  $d_1, \dots, d_{n_i}, h_1, \dots, h_{m_j} \in \mathbb{Z}$ . Daí

$$\text{Cov}(f, \mathcal{T}^s g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \text{Cov}(I_{Z_{1,i}}, \mathcal{T}^s I_{Z_{2,j}}),$$

mas, como pelo Lema 5c,

$$\text{Cov}(I_{Z_{1,i}}, \mathcal{T}^s I_{Z_{2,j}}) < \frac{[2^{(n_i+m_j)} - 1] \cdot (27\beta)^p}{1-27\beta} (27\beta)^s,$$

temos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(f, \mathcal{T}^s g) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \text{Cov}(I_{Z_{1,i}}, \mathcal{T}^s I_{Z_{2,j}}) \\ &< \frac{(27\beta)^p}{1-27\beta} (27\beta)^s \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [2^{(n_i+m_j)} - 1] \cdot a_i b_j. \end{aligned}$$

Seja,

$$q = \frac{(27\beta)^p}{1-27\beta} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [2^{(n_i+m_j)} - 1] \cdot a_i b_j,$$



logo

$$\text{Cov}(f, \mathcal{T}^s g) < q(27\beta)^s.$$

O Lema 5d está demonstrado.

Vamos agora demonstrar o Teorema 5. Seja a constante definida acima, se  $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{T}^i f$  e  $E(f) = m < \infty$ , temos

$$\begin{aligned} \text{Var}(f + \mathcal{T}f \cdots + \mathcal{T}^{n-1}f) &= \text{Cov}(f + \mathcal{T}f \cdots + \mathcal{T}^{n-1}f, f + \mathcal{T}f \cdots + \mathcal{T}^{n-1}f) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \text{Cov}(\mathcal{T}^i f, \mathcal{T}^j f). \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(\mathcal{T}^i f, \mathcal{T}^j f) \\ &= q(n + (2n-2)(27\beta) + (2n-4)(27\beta)^2 + \cdots + (2n - (2n-2))(27\beta)^{n-1}) \\ &\leq q(n + 2n(27\beta) + 2n(27\beta)^2 + \cdots + 2n(27\beta)^{n-1}) \\ &\leq q(n + 2n \sum_{k=1}^{\infty} (27\beta)^k) \\ &= q(n + 2n \cdot \frac{27\beta}{1-27\beta}) \\ &= nq(1 + 2 \cdot \frac{27\beta}{1-27\beta}). \end{aligned}$$

Agora, aplicando a desigualdade de Tchebyshev, temos que

$$\begin{aligned} \mu_{\text{inv}} \left( \left| \frac{S_n}{n} - m \right| > \varepsilon \right) &\leq \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} \\ &< \frac{nq(1 + 2 \cdot \frac{27\beta}{1-27\beta})}{n^2 \cdot \varepsilon^2} \\ &= \frac{q(1 + 2 \cdot \frac{27\beta}{1-27\beta})}{n \cdot \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

O Teorema 5 está demonstrado.

## 4.2 Processo de Stavskaya Generalizado

As demonstrações destes teoremas são as mesmas dos teoremas no caso do PS *mutatis mutandis*.

Seja  $\bar{\Omega} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_+}$  espaço de  $2-D$  configurações de estados de componentes. Denotamos  $\omega \in \bar{\Omega}$  os elementos de  $\bar{\Omega}$  e chamamos eles de  $2-D$  configurações. Denotamos  $\omega_i^t$  cada componente da configuração  $\omega$ , onde  $t \in \mathbb{Z}_+$  e  $i \in \mathbb{Z}$ .

Sejam  $\Lambda = \{0, 1\}^{\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_+}$ ,  $\mathcal{Z} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_+}$  e  $\mathcal{N} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_+}$  espaços de  $2-D$  configurações de estados de variáveis auxiliares. Denotamos  $\lambda \in \Lambda$  os elementos de  $\Lambda$ ,  $\zeta \in \mathcal{Z}$  os elementos de  $\mathcal{Z}$ ,  $\eta \in \mathcal{N}$  os elementos de  $\mathcal{N}$  e sejam  $\lambda_i^t$  as componentes de  $\lambda$ ,  $\zeta_i^t$  as componentes de  $\zeta$  e  $\eta_i^t$  as componentes de  $\eta$ .

Seja  $\theta_\Lambda$  medida em  $\Lambda$  tal que todas as componentes  $\lambda_i^t$  são v.a. i.i.d. e

$$\theta_\Lambda : \lambda_i^t = \begin{cases} 1 & \text{com probabilidade } \beta \\ 0 & \text{com probabilidade } 1 - \beta. \end{cases}$$

Seja  $\theta_{\mathcal{Z}}$  medida em  $\mathcal{Z}$  tal que todas as componentes  $\zeta_i^t$  são v.a. i.i.d. e

$$\theta_{\mathcal{Z}} : \zeta_i^t = \begin{cases} 1 & \text{com probabilidade } \alpha \\ 0 & \text{com probabilidade } 1 - \alpha. \end{cases}$$

Seja  $\theta_{\mathcal{N}}$  medida em  $\mathcal{N}$  tal que todas as componentes  $\eta_i^t$  são v.a. i.i.d. e

$$\theta_{\mathcal{N}} : \eta_i^t = \begin{cases} 1 & \text{com probabilidade } \gamma \\ 0 & \text{com probabilidade } 1 - \gamma. \end{cases}$$

Obtemos então uma distribuição em  $\bar{\Omega}$ , induzida pelas medidas  $\theta_\Lambda, \theta_{\mathcal{Z}}$  e  $\theta_{\mathcal{N}}$ , definida indutivamente por base de indução

$$\forall i, \omega_i^0 \equiv 1$$

e passo de indução

$$\omega_i^{t+1} = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda_i^{t+1} = 1 \\ \max(\kappa_i^t, \rho_{i+1}^t), & \text{c.c.} \end{cases},$$

onde

$$\kappa_i^t = \begin{cases} 0, & \text{se } \zeta_i^t = 1 \\ \omega_i^t & \text{c.c.} \end{cases},$$

e

$$\rho_{i+1}^t = \begin{cases} 0, & \text{se } \eta_{i+1}^t = 1 \\ \omega_{i+1}^t & \text{c.c.} \end{cases}.$$

para  $t = 0, 1, 2, \dots$

Faremos uma interpretação do PSG como percolação. Neste caso, estamos trabalhando com um operador aleatório que possui três parâmetros, a saber,  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ . Estes três

parâmetros podem ser interpretados como taxas de mortalidade, assim como no PS. Sendo assim, a diferença na interpretação como percolação, em relação ao PS, é que no grafo dual do PSG (que é igual ao grafo dual do PS), os elos direcionados  $\swarrow$ ,  $\nwarrow$  e  $\leftarrow$  estão sempre abertos nestes sentidos; os elos direcionados  $\nearrow$  estão abertos neste sentido com probabilidade  $\alpha$ ; os elos direcionados  $\rightarrow$  estão abertos neste sentido com probabilidade  $\beta$ ; os elos direcionados  $\searrow$  estão abertos neste sentido com probabilidade  $\gamma$ . Considerando estes fatos e observando o Teorema de dualidade no início deste capítulo é possível concluir que não há percolação no grafo original se há um contorno aberto auto-evitante no grafo dual no sentido anti-horário. Observamos que elos com os sentidos  $\swarrow$ ,  $\nwarrow$  e  $\leftarrow$  sempre acrescentam um passo à esquerda ao contorno do grafo dual e denotamos o número de passos à esquerda no contorno de  $N_{\text{esq}}$ . De forma similar, observamos que elos com os sentidos  $\searrow$ ,  $\nearrow$  e  $\rightarrow$  sempre acrescentam um passo à direita ao contorno e denotamos o número de passos à direita no contorno de  $N_{\text{dir}}$ .

Como podemos colocar o grafo no plano, e podemos interpretar as setas  $\searrow$ ,  $\nearrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\swarrow$ ,  $\nwarrow$  e  $\leftarrow$  como vetores, todos esses vetores de módulo igual a 2 e suas coordenadas são dados na tabela abaixo:

Seta	Coordenadas
$\nwarrow$	$(-1, 1)$
$\leftarrow$	$(-2, 0)$
$\swarrow$	$(-1, -1)$
$\searrow$	$(1, -1)$
$\rightarrow$	$(2, 0)$
$\nearrow$	$(1, 1)$

**Quadro 2.** *Setas que indicam os possíveis passos no grafo dual do PSG, e suas coordenadas quando estas são representadas como vetores de módulo igual a 2 no plano.*

Seja  $S_{\text{dir}}$  a soma dos valores dos módulos das projeções das setas  $\searrow$ ,  $\nearrow$ ,  $\rightarrow$  no eixo das abscissas e  $S_{\text{esq}}$  a soma dos valores dos módulos das projeções das setas  $\swarrow$ ,  $\nwarrow$  e  $\leftarrow$  no eixo das abscissas. Desta forma, se queremos que o contorno comece e termine no mesmo ponto, queremos que  $S_{\text{dir}} = S_{\text{esq}}$ . É fácil notar que  $S_{\text{dir}} \leq 2N_{\text{dir}}$  e que  $S_{\text{esq}} \geq N_{\text{esq}}$ , portanto  $N_{\text{esq}} \leq S_{\text{esq}} = S_{\text{dir}} \leq 2N_{\text{dir}} \Rightarrow N_{\text{esq}} \leq 2N_{\text{dir}}$ .

Considerando o grafo dual do PSG, que é o mesmo grafo dual do PS, podemos notar que a ausência de partícula no ponto 0 é a mesma coisa que existir um contorno no grafo dual, cercado a partícula. É interessante enfatizar que apesar de os grafos duais serem iguais, os

contornos podem ser diferentes no PSG e no PS. A probabilidade de que exista este contorno não excede

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \psi^k,$$

onde  $C_k$  é o número de tais contornos com  $k$  passos à direita (não necessariamente horizontais). Como damos  $k$  passos à direita e a quantidade de passos à esquerda não ultrapassa  $2k$ , no contorno são dados no máximo  $3k$  passos, analogamente, ao darmos  $k$  passos à direita, nós daremos no mínimo  $\lfloor k/2 \rfloor$  passos à esquerda, portanto, no mínimo daremos  $k + \lfloor k/2 \rfloor$  passos, onde  $\lfloor \cdot \rfloor$  denota a função parte inteira. Como cada passo de um contorno tem somente seis possíveis direções,  $C_k \leq \sum_{i=k+\lfloor k/2 \rfloor}^{3k} 6^i$ . Como em cada passo à direita existem 3 possíveis direções e cada direção está aberta com probabilidade distinta, podemos simplesmente considerar a maior dessas probabilidades, ou seja, tomar o  $\psi = \max[\alpha, \beta, \gamma]$  já que queremos uma cota superior. Então a probabilidade de que exista uma partícula no local 0 num tempo  $t$  qualquer não excede

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=k+\lfloor k/2 \rfloor}^{3k} 6^i \cdot \psi^k &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi^k \left( \frac{6^{k+\lfloor k/2 \rfloor} (6^{2k-\lfloor k/2 \rfloor+1} - 1)}{5} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left( 6 \sum_{k=1}^{\infty} \psi^k 6^{3k} - \sum_{k=1}^{\infty} \psi^k 6^{k+\lfloor k/2 \rfloor} \right) \end{aligned}$$

mas,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \psi^k 6^{k+\lfloor k/2 \rfloor} \right| < \left| \sum_{k=1}^{\infty} \psi^k 6^{3k} \right|,$$

se essas séries forem convergentes, então,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=k+\lfloor k/2 \rfloor}^{3k} 6^i \cdot \psi^k &= \frac{1}{5} \left( 6 \sum_{k=1}^{\infty} \psi^k 6^{3k} - \sum_{k=1}^{\infty} \psi^k 6^{k+\lfloor k/2 \rfloor} \right) \\ &< \frac{6}{5} \cdot \frac{216\psi}{1 - 216\psi}, \end{aligned}$$

onde  $\psi = \max[\alpha, \beta, \gamma]$ .

#### 4.2.1 Demonstração da Proposição 2

Temos que foi provado para o PS que se  $\pi_{0,1} = \pi_{1,0} = \pi_{1,1} < \frac{1}{27}$  então o processo admite uma medida invariante não trivial. Assim, através da monotonicidade de ambos operadores

é possível concluir que se  $\pi_{0,1} < \frac{1}{27}$ ,  $\pi_{1,0} < \frac{1}{27}$  e  $\pi_{1,1} < \frac{1}{27}$ , então o PSG é não-ergódico. Para este fato ser válido, com base no Quadro 1, da página 7, basta apenas que  $\max(\alpha, \beta, \gamma) < \frac{1}{54}$ .

#### 4.2.2 Demonstração do Teorema 6

Mostraremos aqui apenas o caso em que  $s \in \{0, 1, \dots\}$ , pois os outros casos são análogos.

Considere

$$\mu_t = (R_{\alpha, \beta, \gamma} D)^t \delta_1,$$

e o evento  $E_0 = \{x_0 = 0\}$  significando que no instante de tempo  $t$  não existe nenhuma partícula no ponto 0 do processo. Analogamente, considere o evento  $E_s = \{x_s = 0\}$  significando que no instante  $t$  e no ponto  $s$  do processo não existe nenhuma partícula.

Para demonstrar o Teorema 6 basta provar que

$$\Delta\mu_{inv}(E_0, E_s) < \frac{18}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{|s|}}{1 - 216\psi}.$$

Consideraremos que o evento  $E_0$  ocorrerá se existir uma cerca no grafo dual no espaço delimitado pelo triângulo  $T_1$ , como o apresentado na Figura 5. Considere também que  $E_0 = E_0^1 \cup E_0^2$ , onde  $E_0^1$  significa que existe um contorno no grafo dual com número de passos horizontais à direita menor que  $s$  e  $E_0^2$  significa que existe um contorno no grafo dual com número de passos horizontais à direita maior ou igual a  $s$ . De forma similar, o evento  $E_s$  ocorrerá se existir um contorno no grafo dual no espaço delimitado pelo triângulo  $T_2$ , também como o apresentado na Figura 5. Considere agora que  $E_s = E_s^1 \cup E_s^2$ , onde  $E_s^1$  significa que existe um contorno no grafo dual com número de passos horizontais à direita menor que  $s$  e  $E_s^2$  significa que existe um contorno no grafo dual com número de passos horizontais à direita maior ou igual a  $s$ .

Definimos *comprimento* de contornos, no início da Seção 4.2, como o número de passos à direita. É possível notar que no PSG existe diferença entre comprimento e número de passos horizontais à direita. Como no Teorema 1, é possível observar que os eventos  $E_0^1$  e  $E_s^1$  são independentes, pois a existência de uma cerca em  $T_1$  com número de passos horizontais à direita menor que  $s$  não possui nenhuma relação com a existência de uma cerca de

comprimento menor que  $s$  em  $T_2$  e vice-versa. Definamos agora os eventos  $F_1$  como sendo a existência de um contorno no grafo dual, cercado o ponto 0, com comprimento maior ou igual a  $s$ , e  $F_2$  como sendo a existência de um contorno no grafo dual, cercado o ponto  $s$ , onde este contorno possui comprimento maior ou igual a  $s$ ; é claro que  $E_0^2 \subset F_1$  e  $E_s^2 \subset F_2$ , assim:

Aproveitando a idéia de percolação para o PSG, obtemos

$$\mu_t(E_0^2) = \mu_t(E_s^2) \leq \mu_t(F_1) = \mu_t(F_2) < \sum_{k=s}^{\infty} \sum_{i=k+\lfloor k/2 \rfloor}^{3k} 6^i \psi^k < \frac{6}{5} \cdot \frac{(216\psi)^s}{1-216\psi}.$$

Sendo assim, podemos aplicar o Lema 1 para os eventos  $E_0$  e  $E_s$  e obtemos que

$$|\Delta\mu_t(E_0, E_s)| < \frac{18}{5} \cdot \frac{(216\psi)^s}{1-216\psi}.$$

Da mesma forma, se considerarmos  $s$  negativo, é possível mostrar que

$$|\Delta\mu_t(E_0, E_s)| < \frac{18}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{-s}}{1-216\psi}.$$

Agora tomando o limite de  $t \rightarrow \infty$ , e sabendo que  $\mu_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mu_{inv}$ , concluímos que que

$$|\Delta\mu_{inv}(E_0, E_s)| < \frac{18}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{|s|}}{1-216\psi}.$$

*O Teorema 6 está demonstrado.*

### 4.2.3 Demonstração do Teorema 7

Mostraremos aqui apenas o caso em que  $s \in \{0, 1, \dots\}$ , pois os outros casos são análogos.

Aplicamos, agora, o Lema 2 para o nosso processo; assim, considere os eventos  $E_1$  e  $E_2$ , tais que

$$E_1 = \{x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_n} = 0\}, \quad \text{com} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_n \quad \text{e}$$

$$E_2 = \{x_{j_1+s} = x_{j_2+s} = \dots = x_{j_m+s} = 0\}, \quad \text{com} \quad j_1 < j_2 < \dots < j_m.$$

Então, podemos notar que quando  $t \rightarrow \infty$  e chegamos na medida limite, o evento  $E_1$  continua sendo o cilindro fino  $Zero(i_1, \dots, i_n)$  e o evento  $E_2$  continua sendo a translação na distância  $s$  do cilindro  $Zero(j_1, \dots, j_m)$ , logo, para provar o Teorema 7 basta mostrar que

$$\Delta\mu_{inv}(E_1, E_2) < \frac{6[2^{(n+m)} - 1]}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{j_1+s-i_n}}{1 - 216\psi}.$$

Tomaremos como base para a prova a interpretação do PSG como percolação. Neste sentido, consideraremos  $n$  triângulos, denotados por  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , e  $m$  triângulos denotados por  $U_1, U_2, \dots, U_m$ . Consideraremos que o evento  $E_1$  ocorrerá se existirem  $n$  cercas no grafo dual, uma em cada espaço delimitado pelos triângulos  $T_w$ ,  $w = 1, \dots, n$ . Note que

$$E_1 = (E_{1,1}^1 \cup E_{1,1}^2) \cap (E_{1,2}^1 \cup E_{1,2}^2) \cap \dots \cap (E_{1,n}^1 \cup E_{1,n}^2)$$

onde  $E_{1,w}^1$  significa que o contorno existente no grafo dual, no espaço delimitado pelo triângulo  $T_w$ , tem número de passos horizontais à direita menor do que  $j_1 + s - i_w$  e  $E_{1,w}^2$  significa que o contorno existente no grafo dual tem número de passos horizontais à direita maior ou igual a  $j_1 + s - i_w$ . De forma similar, consideraremos que o evento  $E_2$  ocorrerá se existirem  $m$  contornos no grafo dual, um em cada espaço delimitado pelos triângulos  $U_z$ ,  $z = 1, \dots, m$ . Note também, neste caso, que

$$E_2 = (E_{2,1}^1 \cup E_{2,1}^2) \cap (E_{2,2}^1 \cup E_{2,2}^2) \cap \dots \cap (E_{2,n}^1 \cup E_{2,n}^2)$$

onde  $E_{2,z}^1$ ,  $z = 1, \dots, m$  significa que o contorno existente no grafo dual, no espaço delimitado pelo triângulo  $U_z$ , tem número de passos horizontais à direita menor do que  $j_z + s - i_n$  e  $E_{2,z}^2$  significa que o contorno existente no grafo dual tem número de passos horizontais à direita maior ou igual a  $j_z + s - i_n$ .

É fácil observar que os eventos  $E_{1,w}^1$ ,  $w = 1, \dots, n$  e  $E_{2,z}^1$ ,  $z = 1, \dots, m$  são independentes, pois a existência de um contorno em qualquer  $T_w$  de número de passos horizontais à direita menor que  $j_1 + s - i_w$  não possui nenhuma relação com a existência de um contorno em qualquer  $U_z$  de número de passos horizontais à direita menor que  $j_z + s - i_n$ . Consideremos  $F_w$ ,  $w = 1, \dots, n$ , significando que o contorno existente no grafo dual, no espaço delimitado pelo triângulo  $T_w$ , tem comprimento menor do que  $j_1 + s - i_w$ ; é claro que  $E_{1,w}^2 \subset F_w$ . Da mesma forma definimos  $G_z$ ,  $z = 1, \dots, m$  significando que o contorno existente no grafo dual, no espaço delimitado pelo triângulo  $U_z$ , tem comprimento menor do que  $j_z + s - i_n$ ; é claro que  $E_{2,w}^2 \subset G_w$ .

Por outro lado, usando a representação como percolação, temos que a probabilidade de existência de um contorno no grafo dual em  $T_w$  com número de passos horizontais à direita maior ou igual a  $j_1 + s - i_w$  não excede

$$\begin{aligned} \mu_t(E_{1,w}^2) \leq \mu_t(F_w) &< \sum_{k=j_1+s-i_w}^{\infty} \sum_{i=k+\lfloor k/2 \rfloor}^{3k} 6^i \cdot \psi^k \\ &< \frac{6}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{j_1+s-i_w}}{1-216\psi} \\ &\leq \frac{6}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{j_1+s-i_n}}{1-216\psi}. \end{aligned}$$

De maneira similar, a probabilidade de existência de uma cerca no grafo dual em  $U_z$  com número de passos horizontais à direita maior ou igual a  $j_z + s - i_n$  não excede

$$\begin{aligned} \mu_t(E_{2,z}^2) \leq \mu_t(G_z) &< \sum_{k=j_z+s-i_n}^{\infty} \sum_{i=k+\lfloor k/2 \rfloor}^{3k} 6^i \cdot \psi^k \\ &< \frac{6}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{j_z+s-i_n}}{1-216\psi} \\ &\leq \frac{6}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{j_1+s-i_n}}{1-216\psi}. \end{aligned}$$

Se tomarmos

$$\varepsilon = \frac{6}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{j_1+s-i_n}}{1-216\psi},$$

podemos aplicar o *Lema 2* aos eventos  $E_1$  e  $E_2$ . Neste caso, decorre que

$$|\mu_t(E_1 \cap E_2) - \mu_t(E_1) \cdot \mu_t(E_2)| < \frac{6[2^{(n+m)} - 1]}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{j_1+s-i_n}}{1-216\psi}.$$

Observamos da desigualdade acima que tomando o limite de  $t \rightarrow \infty$ , e sabendo que

$$\mu_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mu_{inv},$$

concluimos que

$$|\Delta\mu_{inv}(E_1, E_2)| < \frac{6[2^{(n+m)} - 1]}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{j_1+s-i_n}}{1-216\psi}.$$

*O Teorema 7 está demonstrado.*



#### 4.2.4 Demonstração do Teorema 8

Agora vamos demonstrar o Teorema 8. A demonstração será dada em duas partes, a saber, parte A e parte B. Na parte A, o interesse é mostrar que se  $a$  é um cilindro fino qualquer e  $b$  é um zero cilindro, então existe uma constante  $C_1$  tal que

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| < C_1(216\psi)^s.$$

Já na parte B, iremos provar que se  $a$  e  $b$  são cilindros finos, então existe uma constante  $C$  tal que  $|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| < C(216\psi)^s$ .

**PARTE A:** *Por indução.*

*Base de indução:* Inicialmente consideremos o caso onde o cilindro  $a$  é zero cilindro. Assim temos,

$$a = \text{Zero}(i_1, \dots, i_n), \quad i_1 < \dots < i_n$$

e

$$b = \text{Zero}(j_1, \dots, j_m), \quad j_1 < \dots < j_m.$$

Pelo Teorema 7 temos que  $\forall s \in \mathbb{Z}$

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| < \frac{6[2^{(m+n-1)} - 1]}{5} \frac{(216\psi)^{j_1+s-i_n}}{1 - (216\psi)},$$

logo se tomarmos

$$C = \frac{6[2^{(m+n-1)} - 1]}{5} \frac{(216\psi)^{j_1-i_n}}{1 - (216\psi)},$$

temos que a base de indução é verdadeira.

*Passo de indução:* Considere o caso geral onde  $a$  é um cilindro fino de base  $B$ , e conjunto de componentes  $D$ , tal que  $a$  é dado por

$$a = \{x \in \Omega \mid \forall i \in D, \forall j \in B \setminus D : x_i = 1, x_j = 0\}.$$

Assim, a indução será dada no número de elementos de  $D$ . Seja  $p$  o número de elementos de  $D$ , suponha que o resultado é válido para  $p$  variando de 0 até  $n - 1$ .

Pelo Lema 3a temos que é possível escrever o cilindro  $a$  como

$$a = \{x \in \Omega \mid \forall i \in B \setminus D : x_i = 0\} \setminus \left( a_{0,1} \cup \bigcup_{j=1}^{C_{n,1}} a_{1,j} \cup \dots \cup \bigcup_{j=1}^{C_{n,n-1}} a_{n-1,j} \right).$$

Aplicando o Teorema 7, temos que existe uma constante  $C_1$  tal que

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(\{x \in \Omega \mid \forall i \in B \setminus D : x_i = 0\}, \mathcal{T}_s b)| < C_1(216\psi)^s, \quad (4.9)$$

e também que existe uma constante  $C_{0,1}$  tal que

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a_{0,1}, \mathcal{T}_s b)| < C_{0,1}(216\psi)^s. \quad (4.10)$$

Utilizando a indução na segunda forma, estamos supondo que para todo  $i < n$  e todo  $j$  existe  $C_{i,j}$  tal que

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a_{i,j}, \mathcal{T}_s b)| < C_{i,j}(216\psi)^s. \quad (4.11)$$

Agora, utilizando o Lema 3b é possível concluir por (4.9), (4.10) e (4.11) que se

$$C = C_1 + C_{0,1} + \sum_{i,j} C_{i,j},$$

então

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| < C(216\psi)^s. \quad (4.12)$$

Fim da parte A.

### PARTE B:

Agora vamos demonstrar por indução que  $b$  pode ser qualquer cilindro fino.

*Base de indução:* consideremos o caso onde o cilindro  $b$  é composto somente por zeros. Assim temos,

$$b = \text{Zero}(j_1, \dots, j_m), \quad j_1 < \dots < j_m.$$

e o cilindro fino  $a$  é um cilindro fino qualquer. A demonstração da validade do resultado decorre da primeira parte da demonstração deste teorema.

*Passo de indução:* Considere agora que o resultado é válido para cilindros que possuem  $p$ ,  $p$  variando de 1 até  $m - 1$ , elementos da configuração iguais a 1. Seja

$$b = \{x \in \Omega \mid \forall i \in D, \forall j \in B \setminus D : x_i = 1, x_j = 0\},$$

onde  $D$  possui  $p$  elementos. Utilizando o Lema 3a podemos escrever o cilindro fino  $b$  como

$$b = \{x \in \Omega \mid \forall j \in B \setminus D : x_j = 0\} \setminus \left( b_{0,1} \cup \bigcup_{j=1}^{C_{m,1}} b_{1,j} \cup \dots \cup \bigcup_{j=1}^{C_{m,m-1}} b_{m-1,j} \right).$$

De maneira similar ao resultado anterior, temos por (4.12) que existe uma constante  $B_1$  tal que

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s\{x \in \Omega \mid \forall i \in B \setminus D : x_i = 0\})| < B_1(216\psi)^s,$$

e que existe uma constante  $B_{0,1}$  tal que

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b_{0,1})| < B_{0,1}(216\psi)^s.$$

Aplicando indução na segunda forma, temos que existem constantes  $B_{i,j}$  tais que

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b_{i,j})| < B_{i,j}(216\psi)^s$$

para todo  $i < m$  e todo  $j$ . Logo, pelo Lema 3b, se  $B = B_1 + B_{0,1} + \sum_{i,j} B_{i,j}$ , então

$$|\Delta\mu_{\text{inv}}(a, \mathcal{T}_s b)| < B(216\psi)^s.$$

Fim da parte B.

*O Teorema 8 está demonstrado.*

#### 4.2.5 Demonstração do Teorema 9

Esta demonstração se segue da mesma maneira que a demonstração do Teorema 4. Temos que  $S_n = x_1 + \dots + x_n$  e que  $E(x_1) = m$ , daí

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_1 + \dots + x_n) &= \text{Cov}(x_1 + \dots + x_n, x_1 + \dots + x_n) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \text{Cov}(x_i, x_j) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{18}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{|i-j|}}{1 - 216\psi}. \end{aligned}$$

Seja

$$q = \frac{18}{5(1 - 216\psi)};$$

temos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(x_i, x_j) \\ &= q(n + (2n - 2)(216\psi) + (2n - 4)(216\psi)^2 + \dots + (2n - (2n - 2))(216\psi)^{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq q(n + 2n(216\psi) + 2n(216\psi)^2 + \dots + 2n(216\psi)^{n-1}) \\
&\leq q(n + 2n \sum_{k=1}^{\infty} (216\psi)^k) \\
&= q(n + 2n \cdot \frac{216\psi}{1 - 216\psi}) \\
&= nq(1 + 2 \cdot \frac{216\psi}{1 - 216\psi}).
\end{aligned}$$

Agora, aplicando a desigualdade de Tchebyshev, temos que

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} \\
&< \frac{nq(1 + 2 \cdot \frac{216\psi}{1 - 216\psi})}{n^2 \cdot \varepsilon^2} \\
&= \frac{q(1 + 2 \cdot \frac{216\psi}{1 - 216\psi})}{n \cdot \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

*O Teorema 9 está demonstrado.*

#### 4.2.6 Demonstração do Teorema 10

*Lema 10a:* Sejam  $I_A$  e  $I_B$  funções indicadoras de  $A = \text{Zero}(a_1, \dots, a_n)$  e  $B = \text{Zero}(b_1, \dots, b_m)$ . Então,  $\exists p \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\text{Cov}(I_A, \mathcal{T}^s I_B) \leq \frac{6[2^{(n+m)} - 1] \cdot (216\psi)^p}{5(1 - 216\psi)} (216\psi)^s.$$

Demonstração do Lema 10a: Temos que

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(I_A, \mathcal{T}^s I_B) &= E(I_A \mathcal{T}^s I_B) - E(I_A)E(\mathcal{T}^s I_B) \\
&= \mu_{\text{inv}}(A \cap \mathcal{T}_s B) - \mu_{\text{inv}}(A)\mu_{\text{inv}}(\mathcal{T}_s B) \\
&= \Delta\mu_{\text{inv}}(A, \mathcal{T}_s B).
\end{aligned}$$

Mas pelo Teorema 7, temos que

$$\Delta\mu_{\text{inv}}(A, \mathcal{T}_s B) < \frac{6[2^{(n+m)} - 1]}{5} \cdot \frac{(216\psi)^{b_1+s-a_n}}{1 - 216\psi}.$$

Reescrevendo a desigualdade temos que

$$\Delta\mu_{\text{inv}}(A, \mathcal{T}_s B) < \frac{6[2^{(n+m)} - 1]}{5} \cdot (216\psi)^p \frac{(216\psi)^s}{1 - 216\psi},$$

onde  $p = b_1 - a_n$ , portanto

$$\begin{aligned} \text{Cov}(I_A, \mathcal{T}^s I_B) &= \Delta\mu_{\text{inv}}(A, \mathcal{T}_s B) \\ &\leq \frac{6[2^{(n+m)} - 1] \cdot (216\psi)^p}{5(1 - 216\psi)} (216\psi)^s. \end{aligned}$$

O Lema 10a está demonstrado.

Lema 10b: Sejam  $f$  e  $g$  funções locais, então existe constante  $q$  tal que

$$\text{Cov}(f, \mathcal{T}^s g) < q(216\psi)^s.$$

Demonstração: Basta decompor as funções  $f$  e  $g$  segundo o Lema 5b, assim

$$f = \sum_{i=1}^n a_i I_{Z_{1,i}}, \quad g = \sum_{j=1}^m b_j I_{Z_{2,j}},$$

onde para todos  $i, j$ ,  $Z_{1,i} = \text{Zero}(d_1, \dots, d_{n_i})$ ,  $Z_{2,j} = \text{Zero}(h_1, \dots, h_{m_j})$ ,  $n_i, m_j \in \mathbb{N}$ ,  $d_1, \dots, d_{n_i}, h_1, \dots, h_{m_j} \in \mathbb{Z}$ . Daí

$$\text{Cov}(f, \mathcal{T}^s g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \text{Cov}(I_{Z_{1,i}}, \mathcal{T}^s I_{Z_{2,j}}),$$

mas, como pelo Lema 10a

$$\text{Cov}(I_{Z_{1,i}}, \mathcal{T}^s I_{Z_{2,j}}) < \frac{6[2^{(n_i+m_j)} - 1] \cdot (216\psi)^p}{5(1 - 216\psi)} (216\psi)^s,$$

temos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(f, \mathcal{T}^s g) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \text{Cov}(I_{Z_{1,i}}, \mathcal{T}^s I_{Z_{2,j}}) \\ &< \frac{6 \cdot (216\psi)^p}{5(1 - 216\psi)} (216\psi)^s \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [2^{(n_i+m_j)} - 1] \cdot a_i b_j. \end{aligned}$$

Seja,

$$q = \frac{6 \cdot (216\psi)^p}{5(1 - 216\psi)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [2^{(n_i+m_j)} - 1] \cdot a_i b_j,$$

logo

$$\text{Cov}(f, \mathcal{T}^s g) < q(216\psi)^s.$$

O Lema 10b está demonstrado.

Agora provemos o Teorema 10. Seja  $q$  a constante definida acima. Como  $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{T}^i f$  e  $E(f) = m < \infty$ , temos

$$\begin{aligned} \text{Var}(f + \mathcal{T}f \cdots + \mathcal{T}^{n-1}f) &= \text{Cov}(f + \mathcal{T}f \cdots + \mathcal{T}^{n-1}f, f + \mathcal{T}f \cdots + \mathcal{T}^{n-1}f) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \text{Cov}(\mathcal{T}^i f, \mathcal{T}^j f). \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(\mathcal{T}^i f, \mathcal{T}^j f) \\ &= q(n + (2n - 2)(216\psi) + (2n - 4)(216\psi)^2 + \cdots + (2n - (2n - 2)(216\psi)^{n-1})) \\ &\leq q(n + 2n(216\psi) + 2n(216\psi)^2 + \cdots + 2n(216\psi)^{n-1}) \\ &\leq q(n + 2n \sum_{k=1}^{\infty} (216\psi)^k) \\ &= q(n + 2n \cdot \frac{216\psi}{1 - 216\psi}) \\ &= nq(1 + 2 \cdot \frac{216\psi}{1 - 216\psi}). \end{aligned}$$

Agora, aplicando a desigualdade de Tchebyshev, temos que

$$\begin{aligned} \mu_{\text{inv}} \left( \left| \frac{S_n}{n} - m \right| > \varepsilon \right) &\leq \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} \\ &< \frac{nq(1 + 2 \cdot \frac{216\psi}{1 - 216\psi})}{n^2 \cdot \varepsilon^2} \\ &= \frac{q(1 + 2 \cdot \frac{216\psi}{1 - 216\psi})}{n \cdot \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Portanto,

O Teorema 10 está demonstrado.

## Capítulo 5

### Discussões, Comentários e Sugestões de Pesquisa

Qual é o lugar desta pesquisa na Ciência? Se autômatos celulares representam alguns processos da natureza, suas medidas invariantes representam o caso quando estes processos estão estabilizados, o que é bastante comum. Então, estudando estas medidas invariantes podemos descobrir ou pelo menos tentar verificar algumas propriedades de processos reais. A situação torna-se mais interessante quando o processo é não-ergódico. Neste caso, aproximamos transições fásicas, que atraem a atenção dos cientistas há muito tempo.

Definimos o Processo de Stavskaya Generalizado, demonstramos que esta classe possui uma medida invariante não-trivial, sobre esta medida demonstramos cinco novos teoremas, inclusive a lei dos grandes números. Nossos resultados, tanto para o Processo de Stavskaya quanto para o Processo de Stavskaya Generalizado, mostram que apesar de não-ergodicidade, as medidas invariantes se comportam de maneira parecida às medidas invariantes dos autômatos celulares ergódicos.

Nossas estimativas exponenciais de  $\Delta\mu_{inv}$  significam que mudando ao longo de  $\mathbb{Z}$ , esquecemos os eventos muito rápido. Isto é parecido com o comportamento de alguns sistemas dinâmicos “misturados” tais que a previsão é impossível. Também há conexão entre a teoria da medida de Gibbs e nosso trabalho.

É possível notar que todos os nossos resultados são provados somente se os parâmetros  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são muito pequenos, logo, longe da área crítica. Os mesmos resultados são válidos perto da área crítica? Não sabemos, mas esse é um tópico que, segundo a nossa opinião, merece atenção.

Poder-se-ia criticar este trabalho dizendo que gastamos muito tempo lidando com casos particulares, ainda que realmente seria melhor considerar casos mais gerais. Esta crítica é frequentemente razoável, mas em nosso trabalho temos um contra-argumento. É verdade que consideramos só uma classe de operadores unidimensionais, uniformes, com só dois estados 0 e 1 e só com dois vizinhos  $i$  e  $i + 1$  de cada componente. Mas trabalhos como [K.1978],

[P.1987], [T.2000a] e [T.2000b] mostram que se o conjunto de estados ou o conjunto de vizinhos de uma componente é qualquer, o problema de ergodicidade torna-se insolúvel. O mesmo, provavelmente, é verdade para vários outros problemas.

Uma pergunta plausível é se todas as medidas satisfazem nossos teoremas. A resposta é negativa. Por exemplo, se tomarmos a medida

$$\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1),$$

é possível ver que ela não satisfaz nenhum de nossos teoremas e ao mesmo tempo é medida invariante para qualquer processo da família definida na Seção 2.2 deste trabalho que satisfaz

$$\pi(0 \mid 0, 0) = \pi(1 \mid 1, 1) = 1.$$

Por fim, seria interessante se fosse feito estudo sobre funções não locais e sobre o Teorema central do limite. Tivemos dificuldade ao lidar com o Teorema Central do Limite ao nos depararmos com a relação de dependência entre as variáveis. As versões do Teorema Central do Limite para variáveis dependentes que encontramos não serviram para o nosso problema.

Outro assunto interessante é encontrar alguma forma de achar estimativas mais precisas para o processo de Stavskaya generalizado.



## Referências

- [D.1990] A. Toom, N. Vasilyev, O. Stavskaya, L. Mityushin, G. Kurdyumov and S. Pirogov. Discrete Local Markov Systems. *Stochastic Cellular Systems : ergodicity, memory, morphogenesis*. Ed. by R. Dobrushin, V. Kryukov and A. Toom. Nonlinear Science: theory and applications, Manchester University Press, 1990.
- [FT.2003] R. Fernández and A. Toom. Non-Gibbsianness of the invariant measures of non-reversible cellular automata with totally asymmetric noise. *Geometric Methods in Dynamics (II): Volume in Honor of Jacob Palis. Astérisque*, v. 287, pp. 71-87, December 2003.
- [K.1978] G. L. Kurdyumov. An Algorithm-Theoretic Method in Studying Homogeneous Random Networks. *Locally Interacting Systems and Their Application in Biology*. Ed. Dobrushin, R. L., Kryukov, V. I. and Toom, A. L. *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, v. 653, pp. 37-55, 1978
- [L.1985] T. M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. N.Y., Springer-Verlag, 1985.
- [LT.2002] P. F. de Lima. Teoremas de Dualidade Usados na Percolação. Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco. Recife-Pe, março de 2002. Não publicado.
- [MV.1994] C. Maes and K. Vande Velde. The (non-)Gibbsian nature of states invariant under stochastic transformations. *Physica A*, 206:587–603, 1994.
- [M.1997] D. Makowiec. Gibbsian versus non-Gibbsian nature of stationary states for Toom probabilistic cellular automata via simulations. *Phys. Rev. E*, 55:6582–8, 1997.
- [P.1987] N. Petri. Unsolvability of the Recognition Problem for Annihilating Iterative Networks. *Selecta Mathematica Sovietica*, v. 6, n. 4, pp. 354-363, 1987.
- [SP.1971] O. Stavskaya and I. Piatetski-Shapiro. On homogeneous nets of spontaneously active elements. *Systems Theory Res.*, v. 20, pp. 75-88, 1971.
- [T.1968] A. Toom. A family of uniform nets of formal neurons. *Soviet Math. Dokl.*, V. 9, N. 6, pp. 1338-1341, 1968.

- [T.1972] A. Toom. On invariant measures in non-ergodic random media. *Probabilistic Methods of Investigation*, issue 41. Ed. by A. Kolmogorov. Moscow University Press, Moscow, pp.43-51, 1972. (In Russian).
- [T.1995] A. Toom. Cellular Automata with Errors: Problems for Students of Probability. *Topics in Contemporary Probability and its Applications*. Ed. J. Laurie Snell. CRC Press, pp. 117-157, 1995.
- [T.2000a] A. Toom. Algorithmical unsolvability of the ergodicity problem for locally interacting processes with continuous time. *Journal of Statistical Physics*, v. 98, n. 1/2, pp. 495-501, 2000.
- [T.2000b] A. Toom. Algorithmical unsolvability of the ergodicity problem for binary cellular automata. *Markov Processes and Related Fields*, v. 6, n. 4, pp. 569-577, 2000.
- [T.2001] A. Toom. *Contornos, Conjuntos Convexos e Autômatos Celulares*. 23<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, RJ, 2001.