Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Graduação em Matemática

Curso de Licenciatura em Matemática

Dualidades de grafos traçados no plano e seu uso na percolação

por

Cintia Maria Lopes Ferreira

sob orientação do

Prof. Dr. André Toom

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática - CCEN - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Recife - PE Dezembro /2009

Dualidades de grafos traçados no plano e seu uso na percolação

por

Cintia Maria Lopes Ferreira

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática - CCEN - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Grafos

Aprovada por:

Prof. Dr. Airton Castro

Prof. Dr. André Toom

Prof. Dr. Henrique Araujo

Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Graduação em Matemática

Curso de Licenciatura em Matemática

Dezembro/ 2009

Dedicatória

A Deus.

Agradecimentos

A Deus, minha família, meu orientador André Toom, meu namorado Bruno, aos meus amigos: Abiel (técnico), Bruna, Bárbara, Erinaldo, Felipe, que me ajudaram muito me apoiando.

"Não basta ensinar ao homem uma especialidade, porque se tornará assim uma máquina utilizável e não uma personalidade. É necessário que adquira um sentimento, senso prático daquilo que vale a pena ser empreendido, daquilo que é belo, do que é moralmente correto."

Albert Einstein

Conteúdo

1 Grafos 10

2 Grafos traçados no plano 12

3 Papel quadriculado 15

4 Um pouco sobre percolação 18

5 Traços duais 22

6 Um lema sobre dualidade de traços duais orientados 27

7 Valor crítico em percolação para traços não orientados 35

Introdução

A teoria de transições fasicas é uma parte importante da física moderna e outras ciências exatas. Logo a teoria matemática destes fenômenos também é importante. Nesta conexão vale a pena estudar percolação, pois sua definição é simples, mas os fenômenos são complicados e interessantes. Cada modelo de física estatística e cada modelo de percolação tem pelo menos um parâmetro. Um valor ϵ^* de um parametro $\epsilon \in [0,1]$ é chamado *crítico* se existe uma diferença qualitativa entre comportamento do modelo com $\epsilon < \epsilon^*$ e com $\epsilon > \epsilon^*$. Um valor crítico ϵ^* é chamado trivial se $\epsilon^* = 0$ ou $\epsilon^* = 1$ e nao-trivial se $0 < \epsilon^* < 1$. A maior meta desta monografia é mostrar existência de um valor crítico não-trivial para um modelo de percolação. A monografia apresenta um estudo sobre traços duais no plano. Para os casos de traços duais finitos e infinitos orientados e não-orientados. Este estudo apresenta uma grande utilidade para a obtenção de estimativas superiores de valores críticos, no modelo de percolação em duas dimensões.

Capítulo 1

Grafos

Definimos o *grafo* G como uma tripla $(V(G), E(G), \varphi_G)$ constituída por um conjunto V de *vértices* (não vazio), um conjunto E de *arestas* (disjunto de V) e uma regra φ_G que associa a cada aresta de G um par de vértices de G (não necessariamente distintos) chamados *extremos* desta aresta [1].

Será trabalhado com grafos *conexos*.

Assumiremos que cada vértice é extemo de apenas um número finito de arestas. Daí concluímos que se um dos conjuntos E ou V é finito, o outro também será finito e consequentemente se V e E são finitos, G será finito e caso contrário infinito.

Definição 1. Definimos o *grafo não-orientado* G, como um grafo, cujas arestas têm estados: *abertas* ou *fechadas*.

Definição 2. Definimos o *grafo orientado* D, como um grafo, cujas arestas têm estados: aberta ou fechada em cada direção.

Definição 3. Dado um grafo G, um *caminho finito* é uma sequência finita "vértice-aresta-vértice-aresta-vértice-aresta-...aresta-vértice" onde cada arestas conecta vértices entre os quais são colocados nesta sequência (e alguns vértices ou arestas podem coincidir).

Analogamente, um *caminho infinito* é uma sequência infinita "vértice-aresta-vértice-aresta-vértice-aresta-...".

Definição 4. Dado uma grafo L, dizemos que dois vértices v_1, v_2 estão *conectados* em L se existir um caminho com extremidade inicial em v_1 e extremidade final em v_2. Por convenção todo vértice está conectado. consigo mesmo. Um grafo L diz-se um *conexo* se todo o par de vértices estiver conectado em L.

Capítulo 2

Grafos traçados no plano

Dizemos que um grafo é planar se existe um traço, ou seja, seu desenho no plano, sua representação. Onde todas as propriedades e definições do grafo também são verificadas para o seu traço.

Uma *curva* no plano é uma função contínua

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2.$$

Os pontos $f(0)$ e $f(1)$ são chamados *extremos* desta curva. Curva é chamada *simples* se

$$\forall x, y \in [0, 1] : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y). \tag{2.1}$$

Definição 5. Uma curva é chamada *fechada* se seus extremos coincidem. Uma curva f é chamada *poligonal* se existem $0 = t_o < t_1 < \cdots < t_n = 1$ tais que $f(t)$ é uma função afim em cada segmento $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, ..., n$. Os pontos $f(t_k)$, $0 < k < n$ são chamados *cantos* e os conjuntos

$$\{f(t) \mid t_{k-1} \leq t \leq t_k\}, \ k = 1, ...n$$

são chamados *segmentos de retas.* Consideramos apenas curvas poligonais.

Dizemos que um grafo G é traçado no plano se atende as seguintes condições:

1. Cada vértice v de G é representado pelo ponto $P(v)$ no plano, tal que diferentes vértices são representados por diferentes pontos.

2. Cada aresta e de G é representado por uma curva poligonal f_e, onde:
a) $f_e(0)$ e $f_e(1)$ representam os extremos da aresta.
b)A curva f_e é simples, exceto o caso $f_e(0) = f_e(1)$.

3. Se $e_i \neq e_j$ são arestas diferentes, as curvas correspondentes não têm pontos em comum com exceção de casos quando duas arestas tem extremos em comum.

4. Cada subconjunto limitado no plano intersecta apenas um conjunto finito de curvas que representa arestas [2].

Definição 6. Uma curva fechada é chamada *simples* se a regra 2.b) é cumprida salvo os extremos. Como exemplo temos a curva de Jordan, que é uma curva fechada simples. De acordo com o bem conhecido Teorema de Jordan, que diz: *Qualquer curva de Jordan separa o plano em duas regiões, uma limitada e outra ilimitada, tal que qualquer curva que ligue um ponto da região ilimitada a um ponto da região limitada, corta a curva de Jordan em pelo menos um ponto.*

Definição 7. Um caminho finito ou infinito é *simples*, se todos os vértices na sequência são diferentes.

Definição 8 Um *contorno* é um caminho finito no qual os vértices inicial e final coincidem. No nosso estudo, trabalharemos com contornos simples.

Caminhos traçados no plano são representados por curvas, assim como contornos são representados por curvas fechadas.

Definição 9. Para todo grafo planar existe um traço, ou seja, seu desenho no plano, sua representação. Onde todas as propriedades e definições do grafo também são verificadas para o seu traço.

Capítulo 3

Papel quadriculado

Será trabalhado com um traço não-orientado chamado de *papel quadriculado*.

Papel quadriculado não-orientado:

Todos os vértices são denotados por pares de números inteiros (i, j), cada vértice (i, j) é conectado com 4 vértices:

$(i + 1, j)$, $(i, j + 1)$, $(i - 1, j)$, $(i, j - 1)$ [3].

Como mostra na figura a seguir:

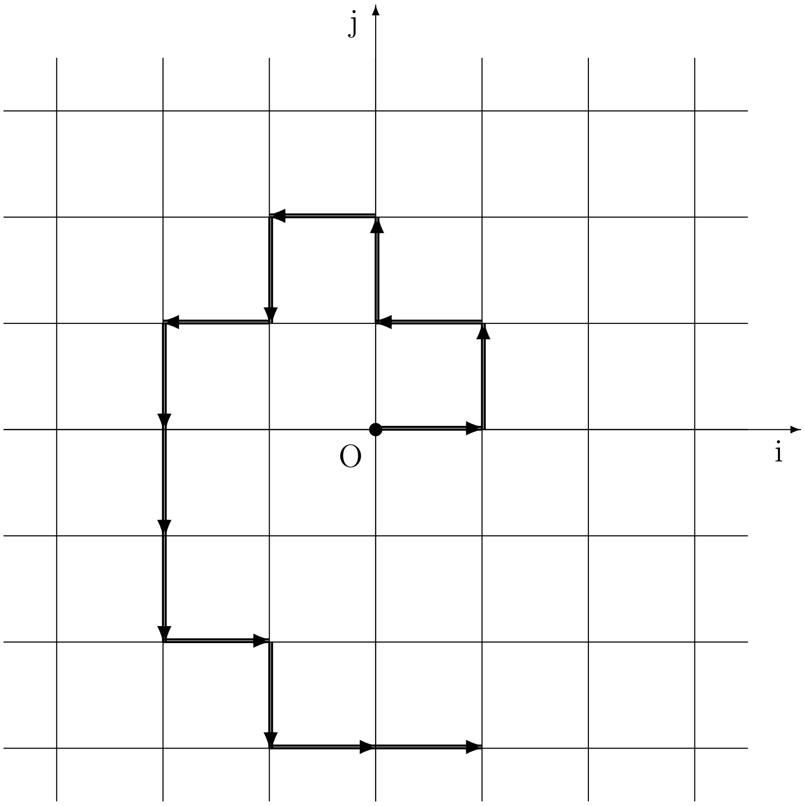


Figura 3.1 mostra uma parte finita de um traço infinito chamado "papel quadriculado". As setas mostram um caminho finito que começa do O. Este caminho é simples e tem 14 passos.

Papel quadriculado orientado:

Neste caso as arestas são orientadas e só podemos passar em uma direção. A figura 1.2 mostra um traço orientado também chamado papel quadriculado. Neste caso o conjunto dos vértices usados é só $\{(i,j),\ i,j = 0,1,2,\ldots\}$ pois a aresta está aberta para a direita ou para acima.

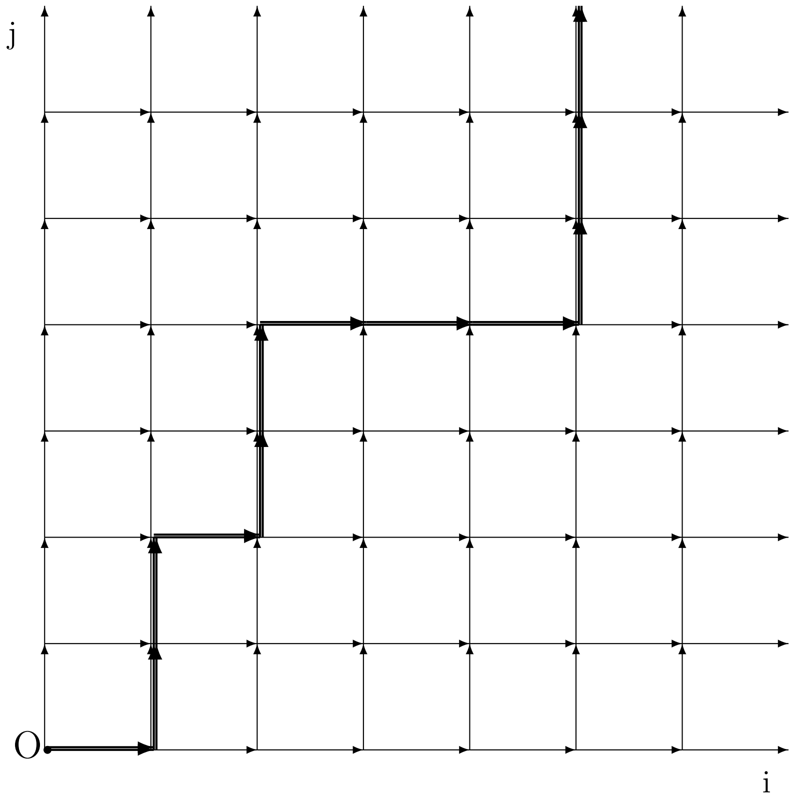


Figura 3.2. Papel quadriculado orientado. Neste caso um caminho só pode conter passos dirigidos para o leste ou o norte. Um caminho partindo do O é apresentado através de setas.

Capítulo 4

Um pouco sobre percolação

Suponha que cada aresta de um grafo é um tubo que pode estar *aberta* ou *fechada*. Escolhemos um vértice e supomos pela definição, que este vértice é fonte de líquido, logo este vértice é sempre molhado. Atribuímos então, uma probabilidade ϵ caso a aresta esteja *aberta* e $1 - \epsilon$ se a aresta estiver *fechada*, onde estes eventos: estar aberto e estar fechado, são independentes. A orígem $O = (0, 0)$ é uma fonte de líquido que pode passar ao longo das arestas abertas, impedida de passar ao longo das arestas fechadas. Um caminho é chamado aberto se todos as arestas estiverem abertas. Os vértices estão sempre abertos. Porém se estes receberão o líquido dependerá das arestas. Um vértice estará molhado se existir um caminho aberto da O até este vértice.

Dizemos que a *percolação* de O até ∞ acontece se o conjunto de vértices que receberam o líquido a saber, estão molhados, for infinito.

Lema 4.1. Um vértice é molhado se e somente se existe um caminho aberto simples da O até este vértice.

Demonstração. ($\Rightarrow$) De fato, se o vértice está molhado, então há algum caminho aberto de O até ele. Caso este caminho não esteja simples, podemos torná-lo simples da seguinte forma:

Como não está simples, visita algum vértice duas vezes e dá uma volta entre estas visitas. Vamos excluir esta volta incluíndo apenas uma desas visitas do nosso caminho, de forma que o caminho ainda esteja aberto e ainda conduzirá O até o nosso vértice. Repetimos este procedimento até que nosso caminho esteja simples.

($\Leftarrow$) De fato, se existe um caminho aberto simples da O até um vértice, este vértice está molhado, como definimos.

$\square$

Lema 4.2. Percolação da O até ∞ no papel quadriculado é equivalente a existência de um caminho aberto infinito simples que começa da fonte O.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Vamos classificar o caminhdo que parte do

O pela sequência das arestas no decorrer do seu caminho. Por hipótese, o conjunto de vértices molhados é infinito. De fato, denominando de C o conjunto de caminhos finitos abertos simples que partem da O. Como para qualquer vértice molhado existe um caminho que conduz até ele, como provado no lema 1.1, C é infinito. Classifiquemos C em subconjuntos de acordo com a sua direção na primeira aresta do caminho:

$$C = C_{leste} \cup C_{norte} \cup C_{oeste} \cup C_{sul}$$

Como a união destes subconjuntos é infinita, temos que pelo menos um destes subconjuntos é infinito. Escolhemos a título de exemplificação C_{leste} como infinito, podendo ser qualquer um daqueles conjuntos infinito. Reclassificamos de acordo com a direção da segunda aresta:

$$C_{leste} = C_{leste,leste} \cup C_{leste,norte} \cup C_{leste,sul}$$

Utilizmos novamente o mesmo argumento e fazemos mais uma reclassificação, por exemplo:

$$C_{leste,norte} = C_{leste,norte,leste} \cup C_{leste,norte,norte} \cup C_{leste,norte,oeste}$$

E assim podemos continuar indutivamente, no n-ésimos passo do argumento indutivo, temos uma sequência de n direções tal que o conjunto de caminhos finitos abertos simples que começam com estas direções é infinito. Desta forma, podemos fazer este procedimento infinitas vezes obtendo assim um caminho infinito aberto, simples.

Chamemos de S_n o conjunto de $C_{x_1,x_2,\ldots x_n}$, onde cada x_k é leste ou oeste ou norte ou sul. Por hipótese de indução, pelo menos um elemento de S_n é infinito. Seja pelo menos um elemento de S_n é infinito. Provemos que pelo menos um elemento de S_{n+1} é infinito. Tomemos o elemento infinito de S_n e chamamos de $C_{x_1,x_2,\ldots x_n}$ e apresentamos como a união de $C_{x_1,x_2,\ldots x_n}$, sobre x_{n+1} como *leste, oeste, norte, sul.* Se a união de quatro elementos é infinito, pelo menos um desses conjuntos é infinito.

$\square$

($\Leftarrow$)

É trivial. De fato, se existe um caminho simples infinito que começa da fonte O, temos que o conjunto de vértices molhados também é ∞. Atendendo a definição de percolação da O até ∞.

Capítulo 5

Traços duais

Todas as propriedades e definições do grafo também são verificadas para o seu traço em percolação.

Chamemos de *obstáculo* qualquer conjunto C de arestas tal que se todas as arestas em C sao fechadas, nao há percolação. Focaremos em obstáculos mínimos, onde seus subconjuntos próprios não são obstáculos. A figura facilita a visualização do que foi dito.

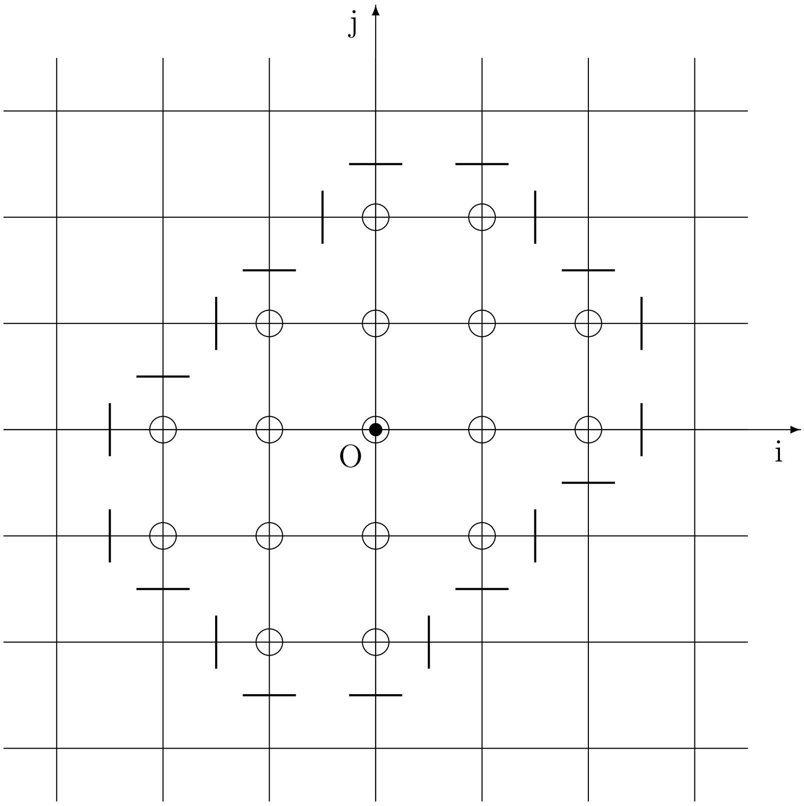
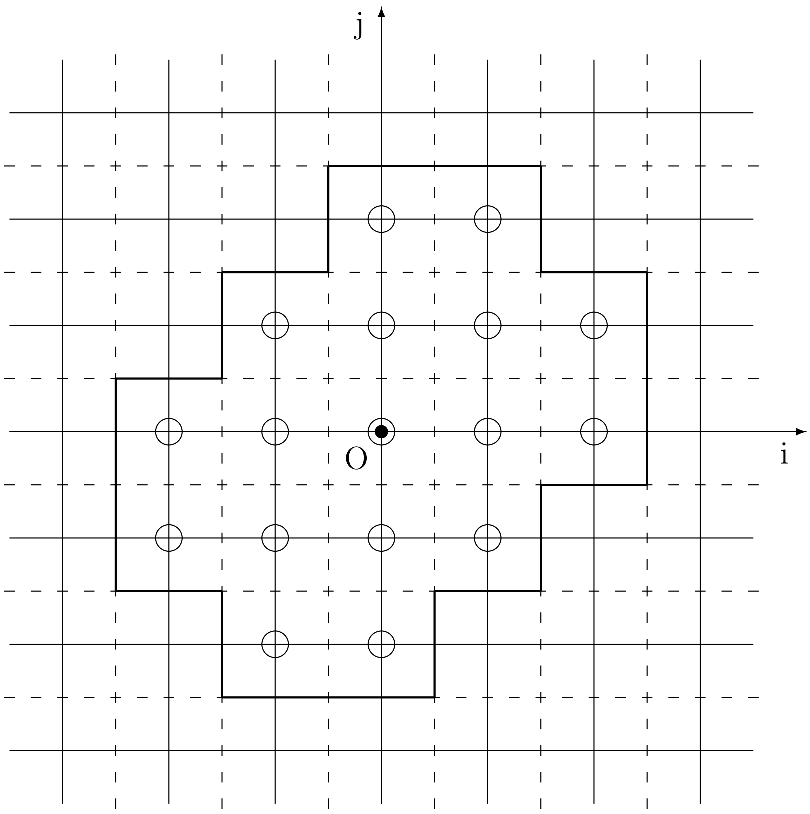


Figura 5.1. Um obstáculo mínimo, isto é um conjunto mínimo de arestas fechadas que tornam a percolação impossível. As arestas fechadas são cruzadas, e os vértices molhados são circulados.

Na figura, as arestas fechadas estão cruzadas por segmentos de reta e os vértices molhados estão circulados. Se prolongarmos estes segmentos até a sua interseção com os outros segmentos mais próximos, vemos uma cerca ao redor da orígem O, formando um contorno contínuo. Como mostra na figura



Na figura 1.4. Os cruzamentos das arestas fechadas formam um contorno em torno da origem. Os vértices molhados são circulados.

Traçamos no mesmo plano, outro traço denominado de *traço dual*. Vemos o traço dual através das linhas pontilhadas na figura acima. Vemos que existe uma correspondência biunívoca entre as arestas dos dois traços, ou seja, todas a arestas do traço dual intersecta exatamente uma aresta do traço original e vice-versa. Podemos formalizar estas definições da seguinte forma:

Definição 10. Cada traço G corta a diferença $P-G$ (plano menos traço) em *faces* definidas como classe de equivalência.

Onde dois pontos p e q são chamados equivalentes se existe uma curva em $P - G$ conectando-os.

Dizemos que dois traços conectados G e G' traçados num plano são duais se eles safistazem às seguintes condições:

i) Há uma correspondência biunívoca chamada *dualidade* entre as faces de G e vértices de G', tal que cada face de G contém vértice dual de G'.

ii) Há uma correspondência biunívoca chamada *dualidade* entre os vértices de G e as faces de G', tal que cada face de G' contém vértice de G.

iii) Há uma correspondência biunívoca chamada *dualidade* entre as arestas de G e as arestas de G', tal que cada aresta do traço original G cruza uma aresta do traço dual G', em um único ponto em cada interseção. Onde este ponto de interseção não é nenhum dos extremos das arestas dos traços [2].

Apresentamos duas regras (1) e (2) para traços duais não-orientados e orientados respectivamente.

Regra (1) Para traços duais não-orientados

Toda aresta do traço G' é aberto, se e somente se, a aresta dual do traço dual G é fechado.

Dado um traço não-orientado G, dizemos que:

a) Vértices α e β do traço G são chamados alcançáveis se existe um caminho simples finito conectando-os.

b) Vértice α é alcançável com o ∞ se existe um caminho simples infinito partindo de α.

Regra (2) Para traços duais orientados.

Dadas arestas duais e e e' dos traços duais D e D', respectivamente,para cada direção de e, a direção correspondente de e' é a direção da direita para esquerda, quando seguimos ao longo de e em dada direção. Cada aresta e do traço D está aberta em certa direção, se e somente se a aresta dual e' do traço D' está fechada na direção correspondente.

Dado um traço orientado D, dizemos que:

a) Vértice b é alcançado pelo vértice a, se e somente se há um caminho simples de a para b, aberto na direção de a para b.

b) ∞ é alcançado pelo vértice a, se e somente se, existe um caminho simples com início em a e é aberto na direção distante de a.

Capítulo 6

Um lema sobre dualidade de traços duais orientados

Supondo que para o caso não-orientado, o seguinte lema esteja provado:

Lema 6. Seja (G, G') um par de traços duais não-orientados, satisfazendo a regra (1), então:

a) Se G é finito: Dois vértices α e β não são alcançáveis em G, se e somente se, há um contorno simples em G', cuja representação deixa $P(\alpha)$ e $P(\beta)$ em diferentes regiões.

b) Se G é infinito: Um vértice α e ∞ não são alcançáveis, se e somente se, há uma curva de Jordan simples em G', cuja representação deixa o ponto $P(\alpha)$ na região limitada.

Este lema ainda não foi provado na literatura, embora seja de fácil aceitação, sua demonstração é tão complicada quanto por exemplo a demonstração do teorema da curva de Jordan. Vamos provar este lema para o caso orientado.

Dado um traço orientado D, dizemos que:

a) Vértice b é alcançado pelo vértice a, se e somente se há um caminho simples conectando a e b, aberto na direção de a para b.

b) ∞ é alcançado pelo vértice a, se e somente se, um caminho simples com início em a e é aberto na direção distante de a.

Teorema 6. Seja (D, D') um par de traços duais orientados, safistazendo a regra (2), então:

a) Se D é finito: Um vértice b não é alcancável por algum vértice a em D, se e somente se, há um contorno simples aberto em D', tal que deixa $P(a)$ do lado esquerdo e $P(b)$ no lado direito em relação ao contorno.

b) Se D é infinito: ∞ não é alcançável pelo vértice a em D, se e somente se, há um contorno simples, aberto em D', cuja representação deixa o ponto $P(a)$ em uma área finita e circular no sentido anti-horário.

Demonstração. Caso a)

Seja (D, D') um par dual de traços finitos orientados. **Definição 11**. Um bom caminho , é um caminho simples no traço D, conectando a e b aberto na direção de a para b.

Definição 12. Um bom contorno é um contorno simples no traço D', no qual é aberto na direção cuja representação é uma curva fechada, que leva o ponto $P(a)$ para o lado esquerdo e $P(b)$ para o lado direito em relação ao contorno.

($\Rightarrow$)

Suponha que não existe um bom caminho no traço D e provemos que existe um bom contorno no grafo D'. Vamos classificar os vértices de D em três tipos:

1) Um vértice v de D é do tipo 1, se existe um caminho aberto de a para v.

2)Um vértice v é do tipo 2 se existe um caminho de v para b sem vértices do tipo 1.

3) Um vértice v é do tipo 3 se não é do tipo 1 nem do tipo 2.

Note que cada vértice de D tem exatamente um tipo. Dado um par dual (D, D') cada face de D' é classificada de acordo como o tipo de vértice correspondente de D. Vamos introduzir um par duplo $(\bar{D}, \bar{D}')$ de traços não-orientados. Este novo par tem os mesmos vértices, arestas e representação no plano de (D, D'). Qualquer aresta do traço $\bar{D}$ será aberto, se e somente se, ambos os extremos da sua aresta é do tipo 2, ou ambas não são do tipo 2 em D. Depois declaramos todas as arestas de $\bar{D}'$ como abertas ou fechadas de acordo com a regra (1). Uma vez que a do tipo 1 em D e b do tipo 2 em D, todos os caminhos em $\bar{D}$ que ligam a e b possuem uma aresta fechada. Portanto b não é alcancável por a em D. Portanto, a partir do caso finito de lema 6, há um contorno aberto simples C no grafo $\bar{D}'$, cuja representação separa $P(a)$ e $P(b)$. Denotamos $e'_1, e'_2, e'_3, ..., e'_n$ as arestas daquele contorno. Todas essas arestas são abertas, assim todas as suas duais $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ em $\bar{D}$ são fechadas. Portando cada aresta e_i não conecta um vértice do tipo 2 com vértice do tipo 2 de D. Denotamos esses vértices $u_1, u_2, ..., u_n$ e $v_1, v_2, ..., v_n$ respectivamente. Vamos provar que todos os vértices $u_1, u_2, ..., u_n$ são do tipo 1. Suponha que um vértice u_k não é do tipo 1. Sabemos que u_k é conectado com um vértice v_k de uma aresta e que v_k é do tipo 2. Existe um caminho de u_k para β sem vértices do tipo 1. Assim u_k é do tipo 2. O que é um absurdo. Logo cada u_k é do tipo 1, portanto cada e_i é fechado em G na direção de u_i para v_i, porque se não v_i pode ser do tipo 1. Portanto todo e_i deveria ser aberto em G' em tal direção que as faces u_i estão do lado esquerdo. As faces v_i estão do lado direito. Nenhum vértice do tipo 2 pode estar dentro do contorno C. Logo, u_i estão dentro do nosso contorno C e v_i estão exteriores de C porque os v_i são do tipo 2. Deste que modo, C é um contorno simples, no qual separa $P(a)$ de $P(b)$ e é aberto em tal direção, que leva $P(a)$ para o lado esquerdo e $P(b)$ para o lado direito.

($\Leftarrow$)

Suponha por absurdo que existe um bom caminho H em D e há um bom contorno C em D' e obteremos uma contradição. Por hipótese, $P(a)$ e $P(b)$ estão em diferentes lados de C. Pelo teorema de Jordan, C e H tem no mínimo um ponto em comum. Seja Q o primeiro ponto de interseção entre C e H, onde movemos ao longo de H partindo de $P(a)$. Assim, Q pertence às representações de duas arestas duais: e de D e e' de D'. A aresta e' pertence ao contorno C e está aberto na direção de C da esquerda para direita. Uma vez que $P(a)$ está do lado direito, movemos ao longo de C no sentido anti-horário. A aresta e do caminho H é aberto na direção da esquerda para direita em relação a C. Desta forma, e e e' são abertos em duas direções, obtemos assim uma contradição de acordo com a regra 2.

$\square$

Demonstração. Prova do caso b):

Seja (D, D') um par de traços duais infinitos orientados. Um bom caminho é um caminho simples, infinito em D, qual começa em a e é aberto naquela direção. Um bom contorno é um contorno simples no grafo D', no qual é aberto em tal direção. Sua representação cerca $P(a)$ no sentido anti-horário.

$(\Rightarrow)$ Suponha que não existe um bom caminho no grafo D e provemos que existe um bom contorno no grafo D'. Vamos classificar os vértices de D em três tipos:

1) Um vértice v de D é do tipo 1, se existe um caminho aberto de a para v.

2)Um vértice v é do tipo 2 se existe um caminho de v para ∞ sem vértices do tipo 1.

3) Um vértice v é do tipo 3 se não é do tipo 1 nem do tipo 2.

Note que cada vértice de D tem exatamente um tipo. Dado um par dual (D, D') cada face de D' é dado o mesmo tipo como o tipo de vértice correspondente de D. Vamos introduzir um par duplo $(\bar{D}, \bar{D}')$ de grafos não-orientados. Este novo par tem os mesmos vértices, aresta e representação no plano de (G, G'). Qualquer aresta do traço $\bar{D}$ será aberta, se e somente se, ambos os extremos da sua aresta é do tipo 2, ou ambas não são do tipo

2 em D. Depois de declarar todas as arestas de $\bar{D}'$ como abertas ou fechadas de acordo com a regra (1). Como não há um bom caminho em D, o conjunto de vértices do tipo 1 em D é finito. Portanto cada caminho simples em D começando em a, tem um número finito de vértices do tipo 1. Então para cada caminho simples infinito em D, começando em a há um último vértice w do tipo 1. Todos os vértices subsequentes são do tipo 2. De acordo com a definição de $\bar{D}$, a aresta de $\bar{D}$, no qual conecta w com o seu sucessor naquele caminho, é fechado. Então o ∞ é alcançado por a em $\bar{D}$. Portanto, para o caso infinito do grafo dual $\bar{D}$, há um contorno simples,aberto C, no qual cerca $P(a)$.

Denotamos $e'_1, e'_2, e'_3, ..., e'_n$ as arestas daquele contorno. Todos essas arestas estão abertas, assim todas as suas duais $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ em $\bar{D}$ são fechadas. De acordo com a definição do traço $\bar{D}$, cada aresta e_i de $\bar{D}$ conecta vértices que não são do tipo 2, com um vértice do tipo 2 em D. Denotamos esses vértices $u_1, u_2, ..., u_n$ e $v_1, v_2, ..., v_n$ respectivamente. Como no caso finito, provamos que cada u_i é do tipo 1. Então e_i é do tipo 1. Então e_i tem que ser fechada em G, da direção de u_i para v_i. Um vez que outro v_i é do tipo 1. Então todas as e'_i pode ser abertas em G' em tais direções das faces u_i, que estão do lado esquerdo e as faces v_i que estão do lado direito. Como vimos, o vértice do tipo 2 não pode estar dentro do contorno C^*. Portanto, cada u_i está dentro de C^* e v_i está fora deste porque v_i é do tipo 2. Então C é um contorno simples em G', cuja representação cerca $P(a)$, no qual é aberto na direção que leva $P(a)$ para o lado esquerdo, no sentido anti-horário.

($\Leftarrow$) Suponha por absurdo que existe um bom caminho H em D e há um bom contorno C em D' e obteremos uma contradição. De acordo com a definição 4 sobre traços desenhados no plano, existe apenas um conjunto finito de vértices de D dentro de C. Assim, H é simples e infinito, contendo um vértice b, no qual está no exterior de C. Então $P(a)$ e $P(b)$ estão em regiões diferentes de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. De acordo com o teorema de Jordan, C e H tem no mínimo um ponto em comum. Seja Q o primeiro ponto da interseção de C com H onde vamos ao longo de H partindo de $P(a)$. Então Q pertence às representações de duas arestas duais: e de D e e' de D'. Pela regra 2 essas arestas não podem estar abertas em duas direções. No entanto, a aresta de H é aberta de dentro para fora no contorno C e a aresta de C é aberta no sentido anti-horário. Contradição.

$\square$

Capítulo 7

Valor crítico em percolação para traços não orientados

Um dos fatos interessantes da percolação em traços não-orientados é a existência de um valor crítico não trivial, que pode ser formulado pelo teorema1.1

Teorema 7.1 Percolação de O até ∞ no papel quadriculado não-orientado tem um valor crítico ϵ^* estritamente entre zero e um, tal que:

a) Se $\epsilon < \epsilon^*$, a probabilidade de percolação é zero.

b) Se $\epsilon > \epsilon^*$, a probabilidade de percolação é positiva.

Definição 13. Quando o valor crítico ε^* for igual a 0 ou 1, nós o denominamos de de trivial; se está entre $(0, 1)$, denominamos de não-trivial.[3]

Demonstração. a) Se existe percolação, pela realização dos seus n primeiros passos, temos um caminho finito aberto simples partindo do O, conforme lema 4.1. Este caminho tem comprimento n. Vamos estimar a probabilidade de sua existência. Para todo caminho simples de comprimento n, a probabilidade de está aberto é ϵ^n. O número de caminhos simples com comprimento n partindo de O não excede ao número $4 \cdot 3^{n-1}$. Uma vez que partindo da orígem temos 4 opções de arestas, de depois para cada aresta escolhida, temos não mais que 3 opções de escolha para arestas. Logo a probabilidade de existir um caminho aberto simples de comprimento n partindo de O é a união de no máximo 4.3^{n-1} eventos, com a probabilidade de cada um sendo ϵ^n. Sendo assim temos a probabilidade de existir um caminho de comprimento n é menor do que:

$$4 \cdot 3^{n-1} \cdot \varepsilon^n \ = \ \frac{4}{3} \cdot (3\varepsilon)^n.$$

Se $\epsilon < 1/3$, esta expressão tende a zero quando $n \to \infty$. $\square$

Demonstração. b) De acordo com o lema 6, a probabilidade que não exista percolação no papel quadriculado é igual a probabilidade da existência de um contorno aberto cercando O no grafo dual. Esta probabilidade não é maior do que a soma das probabilidades de todos os contornos cercando O da probabilidade de que um contorno esteja aberto.

Todos os contornos tem o número par de passos: $2n$, $n \geq 2$. Um contorno com $2n$ passos, está aberto com probabilidade $(1-\varepsilon)^{2n}$.

$$\text{Prob(não haver percolação)} \;\leq\; \sum_{n=2}^{\infty} C_n \; (1-\varepsilon)^{2n},$$

onde C_n é o número de diferentes contornos com $2n$ de passos e cercando O. Para estimar C_n é suficiente:

$i)$ Declarar a coordenada i do ponto mais a esquerda da interseção do contorno com a metade positiva do eixo onde está i. Esta coordenada é $k+1/2$ com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 < k < n-2$

$ii)$ Declarar as direções das $2n$ arestas, a partir do que chegamos no ítem i no sentido anti-horário do contorno. A direção da primeira arestra é *norte*, a direção de qualquer outra aresta tem no máximos três possíveis valores. A direção da última aresta é predeterminada uma vez que o contorno tem que voltar ao seu ponto inicial, não excedendo o número de casos aqui a $3^{\,2n-2}$.

Então $C_n \leq (n-1) \cdot 3^{2n-2}$ logo a probabilidade de que não haja percolação não excede

$$\text{Prob(não haver percolação)} \;\leq\; \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\cdot 3^{\,2n-2}\,(1-\varepsilon)^{2n}.$$

Para $(1-\varepsilon)$ suficientemente pequeno, esta soma é menor que 1. De fato, esta soma é igual a

$$\left(\frac{x}{3(1-x)}\right)^2 \quad \text{onde} \quad x = \big(\,3(1-\varepsilon)\,\big)^2.$$

A soma é menor que 1 se

$$\varepsilon \;>\; 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \;\approx\; 0.71.$$

Logo a probabilidade de percolação no papel quadriculado é zero se ε for suficientemente pequeno, e maior do que zero se ε for suficientemente grande. Definimos o *valor crítico* ε^* como sendo o supremo desses valores de ε, para o qual a probabilidade de percolação é zero. Então

$$0 \;<\; \frac{1}{3} \;\leq\; \varepsilon^* \;\leq\; 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \;<\; 1.$$

Assim, provamos nossa afirmação principal: a existência de um valor crítico não-trivial. □

Esta estimação do valor crítico é rudimentar e pode ser melhorada. De fato, atualmente o valor crítico exato é conhecido: igual a 1/2. Este fato foi provado por Harry Kesten [4].

Índice

abertas, 10

bom caminho, 28
bom contorno, 29

caminho finito, 11
caminho infinito, 11
caminho simples, 14
conectados, 11
conexo, 11
contorno, 14
curva fechada, 12
curva fechada simples, 13

dualidade, 25

faces, 24
fechadas, 10

grafo, 10
grafo não-orientado, 10
grafo orientado, 11

obstáculo, 22

papel quadriculado, 15
percolação, 18

Teorema de Jordan, 14
traço, 14
traço dual, 24

valor crítico, 35

Bibliografia

[1] J.A. Bondy e U. Murty, *Graph theory with applications, Elsevier, 1976.*

[2] Pedro Ferreira de Lima, Andre Toom Dualities *Useful in Bond Percolation.* Cubo (Temuco). , v.10, p.93 - 102, 2008. 4.

[3] A. Toom, *Contornos, conjuntos convexos e autômatos celulares*, Curso ministrado no 23º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, 2001.

[4] H. Kesten, *Percolation theory for mathematicians*, Birkh¨auser, 1982.