UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Departamento de Estatística

PROJETO: Teoria de Componentes Interagentes
SUBPROJETO: Vida e Morte no Papel Quadriculado

ORIENTADOR: Andrei Toom
ALUNO: Rodrigo Bernardo da Silva

Relatório Final

ÁREA: Matemática
SUB-ÁREA: Conjuntos Convexos e Autômatos Celulares

1

"Alas!", disse o Saturniano, "nenhum de nós vivemos mais do que quinhentas revoluções do sol; ... nossa existência é um ponto, nossa duração um instante, nosso globo um átomo."

Voltaire, Micromegas

Não muito tempo atrás ficou-se sabendo que aparentemente diferentes fenômenos e processos que ocorrem na vida, como, por exemplo, transformações de polímeros, atividade vital de tecidos biológicos, crescimentos de cristais e mesmo as operações dos computadores nas quais cálculos são feitos simultâneamente em todas as células, têm, todavia, algo em comum. Essa propriedade em comum é revelada quando pesquisadores tentam descrever os processos na linguagem matemática criando o que eles chamam de modelo matemático.

O famoso físico soviético Ya. I. Frenkel disse que um modelo matemático deve parecer mais para uma caricatura do que uma pintura "realista". A principal necessidade de um modelo matemático é simplicidade: processos vitais são tão complexos que um estudo através de um modelo matemático realístico seria muito difícil. Muito difundido atualmente, os assim chamados "modelos entrelaçados"descrevem processos que acontecem em um entrelaçado de "células"idênticas. Em tais modelos surgem dificuldades mesmo quando cada célula tem apenas dois possíveis estados. Isto é o que vamos discutir abaixo.

2

Colônias e operadores

Para um matemático um pedaço de papel quadriculado reserva muitas possibilidades fascinantes. Nós fazemos uso aqui de uma delas. Abra a página de um caderno de folhas quadriculadas. Vemos uma rede de linhas horizontais e verticais. Chamamos os pontos de interseção delas de nós. Agora, imaginemos um mundo formado somente por esses nós. Suponha que certos seres, chamados células, podem viver nesses nós. Nas figuras, denotamos as células por círculos como na figura 1. Apenas uma célula pode estar em um nó por vez. Se há uma, colocamos um ali, e se não há nenhuma, então há um zero no nó. A coleção de todos os nós ocupados por células é chamada colônia. Se há um número finito de células, dizemos que a colônia é finita. Se não há células, dizemos então que a colônia é vazia. (Como o espaço, o tempo é discreto, isto é, pode ser contado por inteiros: $0, 1, 2, \ldots$).

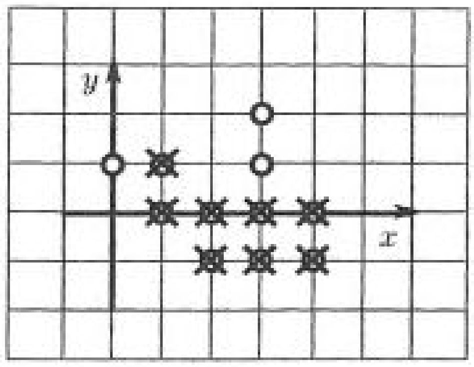

Figura 1:

Dado um operador P, isto é, uma regra que, para cada colônia K existindo em algum tempo t, determina qual colônia é obtida no próximo momento t+1. É preciso deixar claro que o estado de determinada colônia no tempo t+1 será influenciada somente pelo seu estado no tempo t, ou seja, o estado de uma colônia é influenciada apenas pelo seu estado no tempo anterior. Suponha que um operador P é dado. A questão básica que estamos tentando responder é a seguinte: para um dado operador P, há uma colônia finita que nunca morre, isto é, uma colônia finita K tal que não importa quantas vezes P seja aplicado, o resultado será sempre um colônia não vazia? Ou, pelo contrário, o operador P é tal que toda colônia finita morre em algum intervalo de tempo.

Comecemos analisando dois exemplos. Introduzimos coordenadas tomando um dos nós como a origem O, o eixo das abcissas para a direita e o eixo das ordenadas para cima como de costume (veja Figura 1), e um lado de um quadrado sendo de comprimento 1.

Exemplo 1: Suponha que, no tempo t+1, há uma célula no nó $A = (x, y)$ se e somente se a maioria dos seguintes nós estiverem ocupados pelas células no tempo t: o próprio A e seus quatro vizinhos, $(x+1, y)$ à direita, $(x-1, y)$ à esquerda, $(x, y+1)$ acima e $(x, y-1)$ abaixo. Isto define o operador P.

Exercício 1: O que as colônias na Figura 1 (os círculos e as cruzes) geram sob a ação deste operador? Siga a evolução das colônias. Para este operador existe uma colônia que nunca morre?

Exemplo 2: Suponha que no tempo t+1 há uma célula no nó $A = (x, y)$ se e somente se a maioria dos seguintes nós estiverem ocupados no tempo t: A e seus dois vizinhos $(x+1, y)$ e $(x, y+1)$ à direita e acima, respectivamente. Isto define o operador P.

Temos que sob a ação deste operador toda colônia finita morre. (Verifique isto para a colônia na Figura 1). Provaremos este fato, por um método que nos será muito útil adiante.

Analisemos a evolução de colônias de uma forma especial de triângulo isósceles com bases direcionadas para a direita e para cima do vértice do ângulo direito (Figura 2). Note que cada triângulo passa a ser no momento seguinte um triângulo de mesma forma, porém com bases menores 1 unidade. O menor triângulo com bases de comprimento 1 passa a ser um único ponto, e desaparece no próximo passo. (Verifique isto, traçando a evolução da Figura 2). Por essa razão, cada triângulo morre em um tempo igual ao comprimento original de suas bases.

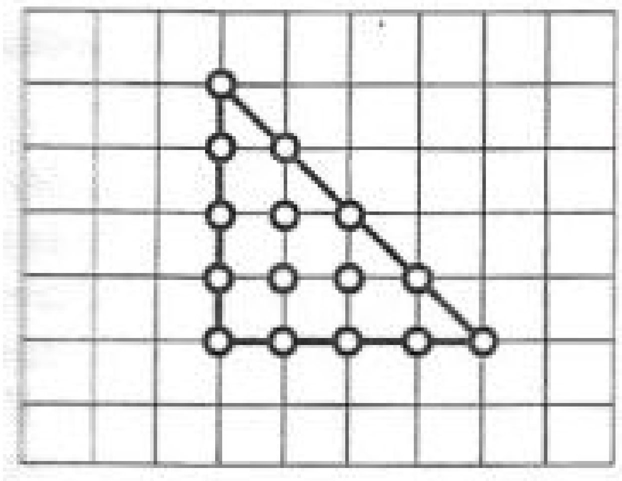

Figura 2:

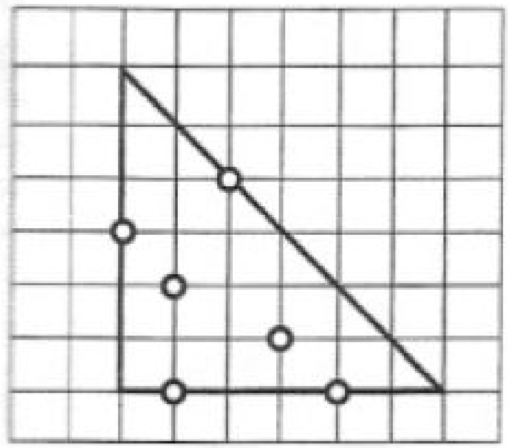

Figura 3:

Agora tome uma colônia finita arbitrária K, contida em triângulo isósceles direito, como na Figura 3. Então a colônia obtida no próximo momento estará contida em um triângulo menor de mesma forma, e assim por diante.

Temos, então, uma importante propriedade do operador P: se uma colônia K_1 é uma parte de uma colônia K_2 (isto pode ser escrito como $K_1 \subset K_2$), então PK_1 é um subconjunto de PK_2: $PK_1 \subset PK_2$ (a possibilidade de PK_1 coincidir com PK_2 não está excluída). Chamamos esta propriedade, que pode ser escrita como

$$K_1 \subset K_2 \Longrightarrow PK_1 \subset PK_2$$

a monotonicidade do operador P. Apenas operadores monotônicos serão considerados neste artigo.

É provado que, para operadores não monotônicos, o nosso problema não tem solução algoritmica. Um interessante e vasto material de investigação sobre um particular operador não monotônico, chamado "O Jogo da Vida", cuja autoria é de John Horton Conway, pode ser encontrado na edição de Outubro de 1970 da revista Scientifc American (pág. 120).

Descrevemos agora a forma precisa do operador P a ser considerado.

Seja O o nó "zero", a origem das coordenadas. Parte da descrição de P é uma lista U consistindo dos r nós $u_1, \ldots, u_r$ em cujos estados no tempo t o estado do nó O no tempo t+1 depende. No exemplo 1, o número dos nós é $r = 5$ e no exemplo 2 o número dos nós é $r = 3$. O estado de qualquer nó A no tempo t+1 depende do estado dos nós $A + u_1, \ldots, A + u_r$ no tempo t. O símbolo + aqui denota adição de vetores. Por exemplo, se $A = (x, y)$ e

$u_1 = (x', y')$, então $A + u_1 = (x + x', y + y')$.

Exercício 2: Descreva as coordenadas dos vetores $u_1, \ldots, u_5$ no Exemplo 1 e dos vetores u_1, u_2, u_3 no exemplo 2.

Ao lado da lista U, a especificação de P inclui a função determinando como o estado de um nó A no tempo t+1 depende dos estados dos nós $A + u_1, \cdots, A + u_r$ no tempo t. Para especificar esta função devemos indicar o que estará no nó A (uma célula ou um zero) no tempo t+1 para uma combinação de unidades e zeros nos nós $A + u_1, \ldots, A + u_r$ no tempo t. Há 2^r combinações no total. Por exemplo, podemos fazer uma tabela na qual há tanto uma unidade como um zero oposto a cada combinação de unidades e zeros. Não é necessário fazer uma tabela, é claro. Podemos dar a função verbalmente, ainda que, de certo modo, tal tabela poderia ser unicamente determinada por descrição verbal.

Funções $f = (a_1, \ldots, a_r)$ cujos argumentos e valores assumem apenas dois valores 0 e 1 são chamadas Booleanas ou funções binárias. Uma função Booleana é dita ser monótona se $f(a_1, \ldots, a_r) \leq f(a'_1, \ldots, a'_r)$ sempre que $a_1 \leq a'_1, \ldots, a_r \leq a'_r$.

Como já mencionado, consideramos apenas operadores monótonos. Eles são dados por funções monótonas. Além disso, supomos que $f(0, \ldots, 0) = 0$ e $f(1, \ldots, 1) = 1$.

Estas restrições não são essenciais, desde que apenas funções monótonas que não as satisfaçam sejam as constantes- funções que tomam apenas dois valores (sempre 0 ou sempre 1). As funções constantes são muito simples, e por essa razão desinteressantes.

Exemplo 3: Suponha que no tempo $t + 1$ há um zero no nó $A = (x, y)$ se e somente se no tempo t pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

a) há zeros em ambos os nós (x, y) e $(x, y + 1)$;

b) há zeros em ambos os nós $(x + 1, y)$ e $(x + 1, y + 1)$.

Isto define o operador P.

Em outras palavras, no tempo $t + 1$ será 1 em $A = (x, y)$ se e somente se:

a) foi 1 em (x, y) ou $(x, y + 1)$ e

b) foi 1 em $(x + 1, y)$ ou $(x + 1, y + 1)$.

Isto define o mesmo operador P.

Este exemplo também é muito importante porque servirá de referência para algumas situações que veremos mais adiante.

Exercício 3: a) Trace a evolução das colônias na Figura 1 sob a ação deste operador. Não dá a impressão de que as colônias se horizontalizam a partir da direita mas estendem-se para cima?

b) Prove que toda colônia finita morre sob a ação do operador no Exemplo 3.

Exemplo 4: Suponha que no tempo $t+1$ há um zero no nó $A=(x,y)$ se e somente se no tempo t pelo menos uma das seguintes condições estiverem satisfeitas:

a) há zeros em ambos os nós (x,y) e $(x+1,y+1)$;

b) há zeros em ambos os nós $(x+1,y)$ e $(x,y+1)$.

Isto define o operador P.

Em outras palavras, no tempo $t+1$ será 1 em $A=(x,y)$ se e somente se:

a) foi 1 em (x,y) ou $(x+1,y+1)$ e

b) foi 1 em $(x+1,y)$ ou $(x,y+1)$.

Isto define o mesmo operador P. Para este operador existem colônias finitas que não morrem. De fato, elas mudam constantemente, mas nunca se extingüem. Encontre uma delas.

3

Zero-conjuntos.
O Teorema da Sobrevivência

Agora, reparemos que, ao lado dos nós, há também outros pontos no plano. Do ponto de vista das células que vivem apenas nos nós, é claro, nenhum outro ponto existe, mas para nós eles existem. Consideremos todas as possíveis figuras geométricas- conjunto de pontos no plano. Uma figura M será dita preenchida por zeros se houver zeros em todos os nós contidos nesta figura.

DEFINIÇÃO 1: Uma figura M é dita ser uma zero-figura (para um dado operador P) se houver um zero no nó O no tempo t+1 sempre que M for preenchida por zeros no tempo t.

Por exemplo, nos Exemplos 1 ou 2 uma figura é uma zero-figura se ela contém pelo menos três (Exemplo 1) ou dois (no Exemplo 2) nós formando o conjunto U.

Para uma linha traçada no plano, definimos um semi-plano como sendo o conjunto de pontos situados em um lado da linha, incluindo a própria linha.

De acordo com a Definição 1, um semi-plano S é chamado de semi-plano zero se houver um zero no nó O no tempo t+1 sempre S que for preenchido por zeros no tempo t.

Seja σ_P a interseção de todos os semi-planos zero para um dado operador P.

TEOREMA DA SOBREVIVÊNCIA: Existe uma colônia finita que sobrevive para sempre sob a ação de dado operador P se e somente se σ_P é não vazia. Ou seja, colônia finita morrerá sob a ação de um determinado operador se e somente se σ_P é vazia.

Exercício 4 (verificação do teorema para os Exemplos 1-4). Prove as seguintes afirmações.

a) No Exemplo 2, os três semi-planos representados na Figura 4 são semi-planos zero. No Exemplo 3, os semi-planos representados na Figura 5 são semi-planos zero. Nos dois casos os semi-planso representados não têm pontos em comum, isto é, sua interseção é vazia. Por esse motivo, a interseção σ_P de todos os semi-planos zero é vazia. De acordo com o teorema, todas as colônias finitas morrem.

b) No Exemplo 1, o conjunto σ_P consiste de um único ponto O (e, de acordo com o teorema, há uma colônia finita que não morre).

No Exemplo 4, o conjunto σ_P consiste de um único ponto $\xi = (1/2, 1/2)$, (isto não é um nó, o que mostra que nós não nos eram suficientes!)

A colônia mais simples que não morre consiste de quatro nós: os vértices de um quadrado unitário (Figura 6). No momento seguinte ela gera uma "cruz", e esta cruz por sua vez gera o mesmo quadrado, mas deslocado uma unidade para a esquerda e abaixo. Dizemos que uma colônia K preenche uma figura M se ela contém todos os nós em M.

A cruz e o quadrado na Figura 6 podem ser representadas como preenchendo figuras idênticas - os quadrados mostrados nestas figuras. Deste modo, as colônias geradas em sucessivos momentos podem ser representadas como preechendo uma e o mesmo quadrado, deslocado pelo vetor $-\xi = (-1/2, -1/2)$ uma unidade de tempo. Note que os lados deste quadrado são

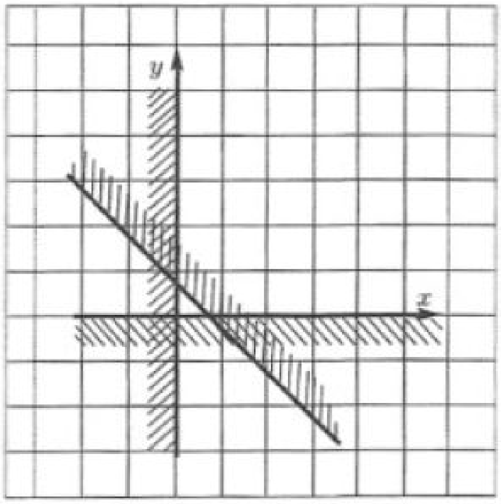

Figura 4:

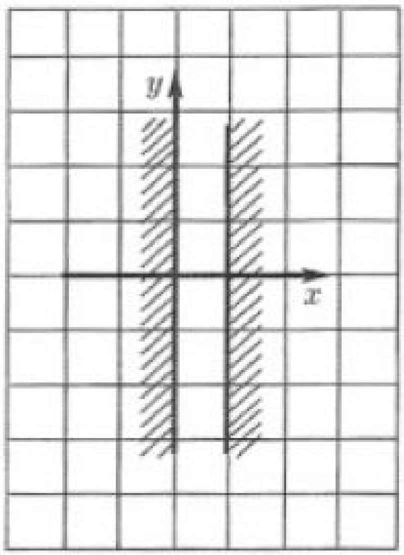

Figura 5:

paralelos às linhas u_iO.

Exercício 5 (piada). Se você fosse uma célula e vivesse em um mundo governado pelo operador no Exemplo 4, então o ponto $\xi = (1/2, 1/2)$ existiria para você ou não?

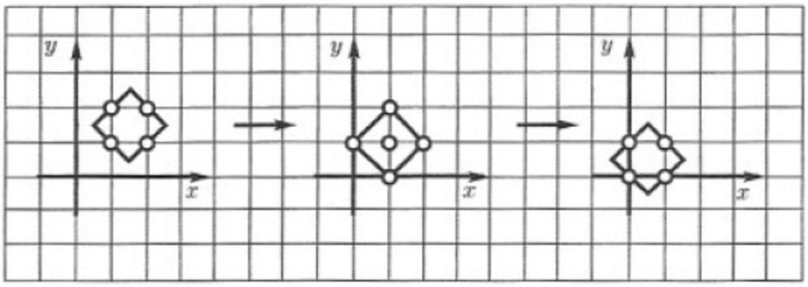

Figura 6:

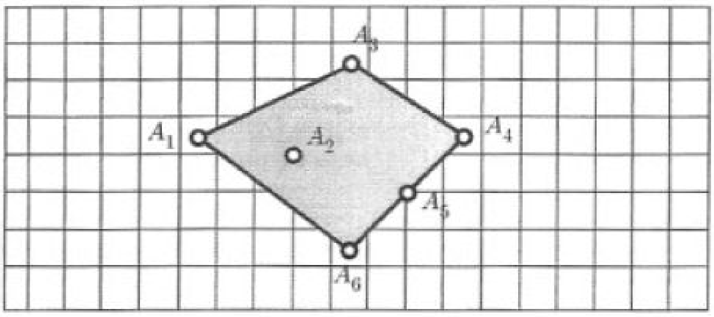

Figura 7:

4

Conjuntos convexos e Envelopes convexos

Um conjunto M de pontos no plano é dito ser convexo se ele satifaz a seguinte condição:

Para quaisquer dois pontos A e B em M, todos os pontos contidos em um segmento de reta com extremidades A e B pertencem a M.

Exercício 6: Prove que todo semi-plano é um conjunto convexo.

Exercício 7: Prove que a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Exercício 8: Em alguns livros, um polígono é definido como convexo se ele está localizado em um lado da linha traçada através de cada um dos seus lados. Prove que um polígono é convexo nesse sentido se e somente se o conjunto de pontos localizados em ou dentro é convexo.

Deste modo, se um conjunto convexo M contém os pontos $A_1, \ldots, A_k$, então contém também todos os segmentos com extremidades nestes pontos, e todos os triângulos com vértices nestes pontos. A união de todos os pontos $A_1, \ldots, A_k$, todos os segmentos com extremidades nestes pontos e todos os triângulos com vértices nestes pontos é chamado de envelope convexo de $A_1, \ldots, A_k$ (o envelope convexo de alguns pontos $A_1, \ldots, A_6$ é mostrado na Figura 7). É claro que o envelope convexo de um conjunto finito de pontos está necessariamente contido em todo conjunto convexo contendo os pontos.

Exercício 9: a) Prove que um conjunto de quatro pontos (no plano) pode sempre ser particionado em dois subconjuntos cujos envelopes convexos interceptam.

b) A mesma tarefa quando o conjunto tem $n > 4$ pontos.

Recorde a definição do conjunto σ_P. Para encontrar σ_P a partir desta definição, devemos construir todos os zero semi-planos, mas há uma infinidade deles. De fato, nos Exemplos 1-4 sabíamos como encontrar σ_P, mas ainda não está claro como fazer isto para um caso geral. Com a ajuda de envelopes convexos agora é possível construir σ_P para qualquer operador P.

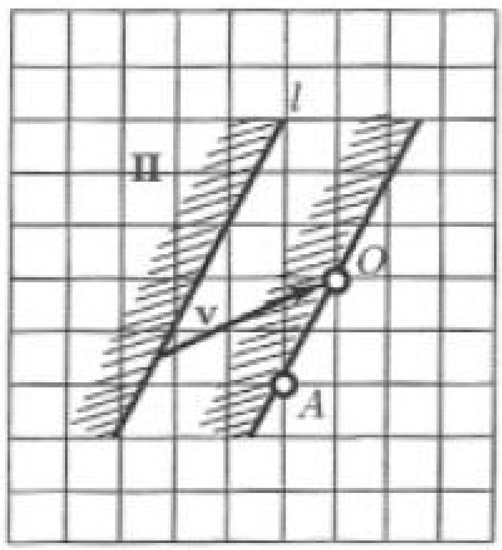

Figura 8:

Consideremos todos os subconjuntos de U. De acordo com a Definição 1, um conjunto $U' \subset U$ é chamado de zero conjunto se o fato de que U' está preenchido por zeros no tempo t implica que há um zero em O no tempo $t+1$.

Lema 1: σ_P coincide com a interseção do envelopes convexos de todos os zero-subconjuntos de U.

Prova: Se todo envelope convexo V está contido em todo conjunto convexo que contém os pontos $A_1, \ldots, A_n$, então V é um subconjunto de U. Se todo zero semi-plano contém inteiramente pelo menos um zero subconjunto de U, então ele contém pelo menos um envelope convexo. Logo, como o envelope convexo está contido em um zero semi-plano, então a interseção de todos os envelopes convexos coincide com a interseção de todos os zero semi-planos. Portanto, σ_P pode nos dar a mesma resposta que os zero semi-planos nos dariam, mas agora para um caso mais geral.

Usando o Lema 1, podemos construir σ_P a partir de qualquer operador P dado por seu conjunto U e função f. Isto é, devemos escrever todos os subconjuntos de U (há 2^r deles), e então usar de nosso conhecimento de f para escolher os zero-subconjuntos entre eles, construir seu envelope convexo de cada um (cada um é um polígono, segmento ou ponto) e, então encontrar sua interseção.

Corolário: O conjunto σ_P é sempre a interseção de um número finito de semi-planos zero.

Exercício 10: Usando o método do Lema 1, construa novamente o conjunto σ_P para os Exemplos 1-4.

5

Prova do Teorema Da Sobrevivência. Usando o Teorema de Helly no papel de um deus ex-machina

Caso A

.

Vamos começar encontrando condições sob as quais todas as colônias finitas morram. Primeiro, façamos algumas importantes observações. Suponha que um semi-plano zero Π está demarcado por uma linha l. Neste caso, se Π estava preenchido por zeros no tempo t então no tempo t+1 há um zero não somente no nó O, mas também em todo nó A para o qual a linha AO é paralela a l (Figura 8).

Além disso, denotemos por v um vetor através do qual l deve estar deslocado em uma direção paralela a fim de passar por O em sua posição (há infinitos vetores, mas v pode ser qualquer um deles). Se, no tempo t, o semi-plano Π é preenchido por zeros, então no tempo t+1 o semi-plano $\Pi + v$ obtido de Π pelo deslocamento pelo vetor v será preenchido por zeros ($\Pi + v$ está representado na Figura 8). Similarmente, se, no tempo t, o semi-plano $\Pi + w$ for preenchido por zeros então no tempo t+1 o semi-plano $\Pi + w + v$ é preenchido por zeros.

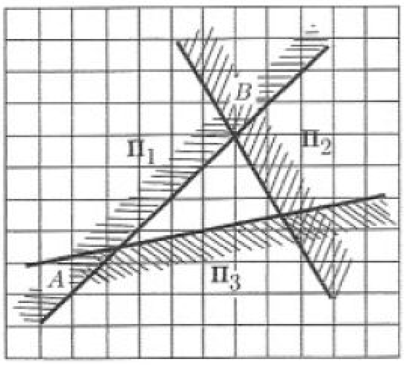

Figura 9:

Lema 2: Dado um triângulo ABC, assuma que os três semi-planos Π_1, Π_2, Π_3 demarcados pelas linhas AB, BC, AC e localizados fora de ABC são semi-planos zero para o operador P (eles estão representados na Figura 9). Então toda colônia finita de unidades morre sob a ação deste operador.

Prova: Seja K uma colônia finita. Desloquemos os semi-planos zero Π_1, Π_2, Π_3 pelos vetores w_1, w_2, w_3 tal que os semi-planos resultantes $\Pi_1' = \Pi_1 + w_1, \Pi_2' = \Pi_2 + w_2, \Pi_3' = \Pi_3 + w_3$ não tenham pontos em comum com K, isto é, eles sejam preenchidos por zeros (Figura 10). As linhas demarcadas de Π_1, Π_2, Π_3 formam um triângulo $A'B'C'$ similar a ABC (e também orientado na mesma direção); denote o seu coeficiente de semelhança por d.

Provaremos que a colônia K morre em um tempo não maior que d.

Seja v_1, v_2, v_3 os vetores que deslocam os semi-planos Π_1, Π_2, Π_3 tal que suas linhas demarcadas passam por O. Pela similaridade, então segue

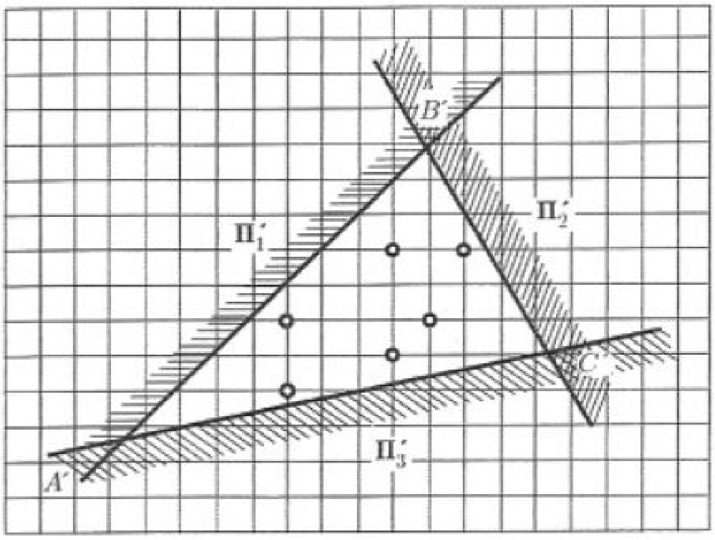

Figura 10:

que se os semi-planos Π_1', Π_2', Π_3' estão deslocados pelos respectivos vetores $d.v_1, d.v_2, d.v_3$ então suas linhas demarcadas também passarão por um único ponto; estes mesmos semi-planos nesta nova posição cobrem o plano inteiro. Mas, por nossas observações, depois de t aplicações de P, os semi-planos obtidos de Π_1', Π_2', Π_3' pelo deslocamento pelos vetores tv_1, tv_2, tv_3 serão certamente preenchidos por zeros, e para $t \geq d$ estes semi-planos cobrirão o plano inteiro. Consequentemente, o plano todo é preenchido por zeros, o que significa que a colônia está morta.

Lema 3: Suponha que dois semi-planos, cuja interseção é vazia, demarcados por duas linhas paralelas e são semi-planos zero para um operador P (como na Figura 5). Então, toda colônia finita de unidades morre sob a ação deste operador.

Prova: Suponha que Π_1 e Π_2 dois zero semi-planos paralelos demarcados por AB e CD e localizados fora de AB e CD, respectivamente. Sejam v_1 e v_2 os vetores que deslocam Π_1 e Π_2, de modo que $\Pi_1' = \Pi_1 + v_1$ e $\Pi_2' = \Pi_2 + v_2$ não tenham pontos em comum. Logo, Π_1' e Π_2' vão manter a mesma orientação que Π_1 e Π_2, com coeficiente de semelhança d. Portanto, pelo coeficiente de semelhança, se os semi-planos Π_1' e Π_2' são deslocados pelos respectivos vetores dv_1 e dv_2, então suas linhas deslocadas também passarão através de um único ponto, e estes mesmos semi-planos cobrirão todo o plano. Logo, depois de t aplicações de P, esses dois zero-planos estarão preenchidos por zero, e cobrirão todo o plano, isto é, toda colônia finita morre sob a ação de tal operador.

Lemas 2 e 3 podem ser combinados na seguinte afirmação.

Lema 4: Se a interseção de três semi-planos zero é vazia, então toda colônia finita de células morre.

Prova: Se a interserção de três semi-planos é vazia então eles estão arranjados como na Figura 9, ou quaisquer dois deles estão arranjados como na Figura 5; mas por estes dois casos a afirmação do Lema 4 está provada.

Caso B

.

Suponha agora que σ_P contém pelo menos um ponto. Provaremos que existe uma colônia que não morre.

Lema 5: Suponha que uma colônia infinita K preenche (no tempo t) um semi-plano Π tendo pelo menos um ponto em comum com o conjunto σ_P. Então, a colônia PK contém o nó O.

Prova: Assuma que PK não contém O. Então há um zero em O no tempo t+1, isto é, no tempo t algum subconjunto zero de U foi inteiramente preenchido por zeros. Conseqüentemente, este subconjunto zero não tinha nenhum ponto em comum com Π, isto é, pertencia ao complemento de Π. Mas,o complemento de Π é um conjunto convexo. Por essa razão, o envelope convexo deste subconjunto zero também estava inteiramente contido no complemento de Π. Por conseqüência (veja Lema 1), σ_P estava inteiramente contido no complemento de Π, o que contradiz nossa suposição.

Corolário: Suponha que uma colônia infinita K preenche um semi-plano Π, tendo pelo menos um ponto em comum com o conjunto $A + \sigma_P$, onde A é um nó. Então, a colônia PK contém A.

A seguinte condição é fundamental para o caso B.

Lema 6: Suponha que o ponto ξ pertence a σ_p. Então há um polígono convexo M, tal que se uma colônia K preenche M, então a colônia PK preenche o polígono $M - \overrightarrow{\xi}$ (figura 11), a colônia P^2K preenche $M - 2\overrightarrow{\xi}$, e assim por diante; em geral, a colônia P^nK obtida de K em n unidades de tempo preenche o polígono $M - n\overrightarrow{\xi}$ obtida de M pelo deslocamento pelo vetor $-n\overrightarrow{\xi}$.

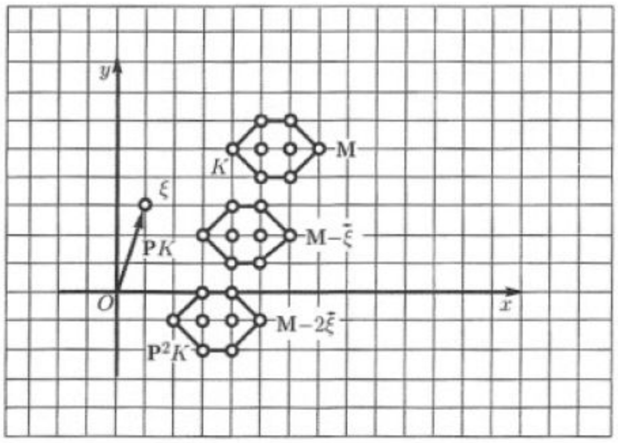

Figura 11:

Uma conseqüência deste lema é que se O pertence a σp, então há uma colônia "estável" que não perde nenhum de seus nós no processo de evolução (mas possivelmente adquire novos nós).

Prova: Note que não prometemos fornecer a menor colônia que não morre (como fizemos para os exemplos 1 e 4). No caso gera isto é difícil. Nos basta encontrar qualquer colônia imortal.

Qualquer configuração $K \in \Omega$ é determinada por suas componentes $K_v \in \{0,1\}$, $v \in U$, onde $U = Z^2$ o espaço inteiro bidimensional. Para qualquer configuração K, denotamos $\mathrm{I}_0(K)$ o conjunto de pontos v onde $K_v = 0$ e $\mathrm{I}_1(K)$ o conjunto de pontos v onde $K_v = 1$.

Definição: Um conjunto S é dito obtuso para um conjunto Q se e só se qualquer translação $S + v$ de S que intercepta o envelope convexo de Q intercepta também Q.

Definição: Um conjunto qualquer é dito ser zero-conjunto mínimo se e só se todos os seus subconjuntos próprios não são zero-conjuntos.

Finalmente, podemos provar que se σ_p é não- vazio, existe uma colônia que não morre.

Seja K uma colônia tal que $\mathrm{I}_1(PK) \supseteq \mathrm{I}_1(K)$. Como consideramos apenas monotonicidade, temos que $\mathrm{I}_1\,(P^tK)$ é não-vazio para todo t.

Teorema de Carathéodory para Conjuntos Bidimensionais: Seja S um conjunto qualquer no plano. Se p pertence a conv(S) então p pertence a conv$(\{p_1, p_2, p_3\})$, onde p_1, p_2, p_3 são alguns pontos em S.

Para quaisquer $S_1, S_2, z \subseteq R^2$, se S_1 é obtuso para z e S_2 é não-vazio, então $S = S_1 + S_2$ é obtuso para z, onde $+$ indica soma vetorial.

Para provar esta afirmação, considere qualquer translação $z + v$ de z e prove que, se $z + v$ não intercepta S, conv$(z) + v$ também não intercepta S.

Considere um ponto p que pertence a conv(z), logo, pelo Teorema de Carathéodory para conjuntos bidimensionais, $p \in$ conv$(\{p_1, p_2, p_3\})$, onde p_1, p_2, p_3 são alguns pontos em z. Por hipótese, $z + v$ não intercepta S, daí $p_1 + v, p_2 + v, p_3 + v$ não pertencem a S. Podemos concluir que conv$(\{p_1 + v, p_2 + v, p_3 + v\})$ não intercepta S, assim p não pertence a S.

Sabemos que o número de zero-conjuntos mínimos é finito pois todos eles são subconjuntos de V, que é o conjunto de vetores vizinhos ($V = (v_1, \cdots, v_n)$). Assim, podemos denotar esses zero-conjuntos mínimos como $z_1, \cdots, z_n$.

Lema: Para qualquer conjunto S no plano, o conjunto -3conv(S) é obtuso para S.

Prova: Considere qualquer translação $S + v$ de S que não intercepta -3conv(S) e prove que conv$(S)+v$ também não intercepta -3conv(S). Considere um ponto $p \in$ conv(S). Pelo teorema de Carathéodore para conjuntos bidimensionais, $p \in$ conv(p_1, p_2, p_3), onde p_1, p_2, p_3 são alguns pontos de S. Ora, por hipótese, $S + v$ não intercepta -3conv(S) o que implica que $p_1 + v, p_2 + v, p_3 + v$ não pertencem a -3conv(S). Podemos concluir deste modo que conv$(p_1 + v, p_2 + v, p_3 + v)$ não intercepta -3conv(S). Logo, p não pertence a -3conv(S). Conjuntos com até três pontos são convexos e, por isso, obtusos para qualquer conjunto. Nosso lema está provado.

Temos que a soma vetorial $S_1, \cdots, S_n$ também é obtuso a ele, de acordo com o que vimos anteriormente.

Somando uma bola grande o bastante para assegurar que a interseção de S com Z^2 é não-vazia, deste modo temos

$$S = S_0 + S_1 + \cdots + S_n$$

Devemos provar que a configuração K, definida por $\mathrm{I}_1(K)$, isto é, conjunto de pontos v onde $K_v = 1$, não é erodada por P, ou seja, devemos provar que $\mathrm{I}_1(PK) \supseteq \mathrm{I}_1(K)$, isto já é o suficiente.

Suponha o oposto: que existe um ponto v tal que $K_v = 1$ mas $(PK)_v = 0$. Assim, deve existir um zero-conjunto mínimo z tal que $K_{v+i} = 0$ para todo $i \in z$. Então $z + v$ não intercepta S. Como S é obtuso para z, o envelope convexo de $z + v$ também não intercepta S. Sabemos que σ_p contém ξ, logo o envelope convexo de z também a contém, assim o envelope convexo de $z + v$ contém v, daí v não pertence a S, que contradiz a nossa suposição que $K_v = 1$. Provamos, assim, que existe uma colônia imortal, se σ_p é não-vazio.

C. Teorema de Helly

Até agora, investigamos os dois casos seguintes:

a) a interseção de quaisquer três semi-planos zero é vazia (Lema 4);

b) a interseção de todos os semi-planos zero é não vazia (Lema 6).

Vamos provar que apenas estes casos são possíveis. Isto segue do Teorema de Helly.

Este é um importante e muito bonito teorema, com muitas formulações, provas e aplicações. Nós o precisamos apenas na seguinte variante.

Teorema de Helly: Suponha que há $n \geqslant 4$ conjuntos convexos no plano e cada três deles têm um ponto em comum. Então todos estes n conjuntos têm um ponto em comum.

Vamos aplicar isso no nosso caso. Pelo corolário do Lema 1, o conjunto σ_P é a interseção de uma lista finita de semi-planos. Suponha que o caso B não é verdade: σ_P é vazio. Então, usando o Teorema de Helly e argumentando por contradição, temos que a interseção de quaisquer três semi-planos é vazia; mas este é o caso A. Isto prova o Teorema da Sobrevivência.

Referências Bibliográficas

[1] TOOM, Andrei. (2002), Contornos, Conjuntos Convexos e Autômatos Celulares. Colóquio Brasileiro de Matemática. Editora IMPA.

[2] TOOM, Andrei. From the life of units. Kvant Selecta: Combinatorics, I. Ed. by S. Tabachnikov. Mathematics World, v.17, 2002.

[3] THOMAS, M. Liggett. Sistemas de Partículas com Interação. Traduzido do inglês para o russo por S. B. Shlosman e A. L. Toom. Editado por R. L. Dobrushin. "Mir", Moscou, 1989. Originalmente publicado como Interacting Particle Systems. N.Y., Springer, 1985.

[4] TOOM, Andrei. Cellular Automata with Errors: Problems for Students of Probability. Topics in Contemporary Probability and its Applications. Ed. J. Laurie Snell. Series Probability and Stochastics ed. by Richard Durrett and Mark Pinsky. CRC Press, 1995, pp. 117-157.

[5] TOOM, Andrei. On Critical Values for Some Random Processes with Local Interaction in R^2. In and Out of Equilibrium: Probability with a Physics Flavor. Ed. By V. Sidoravicius. Birkhäuser Boston, 2002, pp. 309-319.

Assinatura do Orientador

Assinatura da Aluno

Data