Universidade Federal de Pernambuco
Problemas matemáticos envolvendo provas teóricas

ORIENTADOR: Andrei Toom
ALUNO: Ricardo José Ferreira

Introdução

O objetivo deste relatório consiste em demonstrar provas teóricas de difícil resolução para capacitar o aluno da graduação no entendimento teórico das situações criadas em cada questão. O desenvolvimento de todas as provas não foi possível, pois o conhecimento de tais provas não foi totalmente alcançado por parte do aluno. Mesmo assim, todos possuem uma linha de raciocínio inicial sendo que a transição dessa linha de raciocícnio para o caso geral de cada problema não foi alcançado(exceto em um dos problemas).

Problema1:O objetivo deste problema é provar que um número natural é múltiplo de 9 se e somente se a soma dos seus algarismos (em notação decimal) é múltiplo de 9.

Resolução

Analisa-se primeiro a prova para um número natural N com 2 algarismos:

$$N = \overline{a_1 a_0}$$

Escrevendo tal número em forma decimal, obtem-se:

$$N = 10a_1 + a_0$$

Tem-se também a soma dos algarismos S, descrita da seguinte forma:

$$S = a_1 + a_0$$

Subtraindo S de N, vamos obter o seguinte:

$$N - S = 9a_1$$

O novo número obtido, $N - S$, certamente será múltiplo de 9, pois ele é multplicado por nove.
Seja anlisado agora o caso de um número natural N com 3 algarismos:

$$N = \overline{a_2a_1a_0}$$

O qual pode ser escrito da seguinte forma decimal:

$$N = 100a_2 + 10a_1 + a_0$$

A soma de algarismos S agora é representada por:

$$S = a_2 + a_1 + a_0$$

Novamente efetua-se a subtração de S por N, chegando a:

$$N - S = 99a_2 + 9a_1$$
$$N - S = 9 \times 11a_2 + 9a_1$$

O número natural $N - S$ certamente resultará em um múltiplo de 9 pois ele é multipplicado por 9.
No caso geral, tem-se um número natural N a seguir:

$$N = \overline{a_na_{n-1}an - 2...a_2a_1a_0}$$

Escrevendo o número N na forma decimal:

$$N = 10^na_n + 10^{n-1}a_{n-1} + ... + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0$$

Denotando a soma dos alagrismos S em sua forma decimal a seguir:

$$S = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0$$

Seguindo com a subtração de S por N, vamos obter o seguinte número $S-N$:

$$N - S = a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + ... + a_2(10^2 - 1) + a_1(10 - 1)$$

Usando o seguinte argumento de que pode-se escrever 10 como sendo $9 + 1$, tem-se que:

$$
\begin{gathered}
10-1=(9+1)-1=9 \\
10^2-1=100-1=(99+1)-1=99 \\
... \\
10^n-1=(99999...+1)-1=99999...
\end{gathered}
$$

O que leva a:

$$N-S=99999...a_n+99999...a_{n-1}+...+99a_2+9a_1$$

Sendo assim, certamente o número natural $N-S$ será múltiplo de 9, pois ele é multiplicado por 9.
Logo, chega-se a conclusão de que um número natural é múltiplo de 9 se e somente se a soma de seus algarismos(em notação decimal) é multiplo de 9.