UM TEOREMA QUE PODE SER USADO NA PERCOLAÇÃO

Hemílio Fernandes Campos Coêlho Andrei Toom

PIBIC-UFPE-CNPq

A percolação é uma parte importante da teoria da probabilidade moderna que tem atraído muita atenção nas últimas décadas. Um dos fatos mais importantes da teoria da percolação é a existência de valores críticos não triviais, estritamente entre zero e um. Encontrar esses valores críticos não é tarefa fácil; para a maioria dos casos existentes podemos encontrar apenas estimativas. Tipicamente, achar uma estimativa inferior é simples, no entanto a obtenção de uma estimativa superior é mais difícil. Quando temos um grafo planar, podemos obter estas estimativas utilizando vários teoremas de dualidade. A motivação dessa pesquisa é provar um desses teoremas, cuja demonstração até agora não foi apresentada.

1. Papel Quadriculado

Em termos matemáticos, o papel quadriculado, denotado por Π, é um grafo com os vértices em $\mathbb{Z}^2$ formado pelo conjunto de pares (i, j), onde i e j são números inteiros. Qualquer vértice (i, j) está conectado através de elos não orientados, com

$$(i+1, j), (i, j+1), (i-1, j), (i, j-1) \quad ,$$

onde cada elo está aberto ou fechado. Denotamos por Q o conjunto de quadrinhos cortados no plano.

2. Caminhos

a) Caminho Finito: Uma seqüência finita "vértice - elo - vértice - elo-...- elo - vértice" onde cada elo conecta os vértices entre aqueles colocado nesta seqüência. Dizemos que um caminho finito conecta o primeiro e o último vértice.

b) Caminho Infinito: Uma seqüência infinita "vértice - elo - vértice - elo -..." onde cada elo conecta os vértices entre aqueles colocado nesta seqüência.

c) Caminho bi-infinito: Uma seqüência infinita "...vértice - elo - vértice - elo -..." onde cada elo conecta os vértices entre aqueles colocado nesta seqüência.

Um caminho é dito *auto-evitante* se todos os vértices em sua seqüência são diferentes.

3. Contorno

Um *contorno* é um caminho finito no qual os pontos inicial e final coincidem. No papel quadriculado, um contorno está aberto se todos os seus elos estão abertos.

4. Corredor

a) Corredor Finito: Uma seqüência finita "quadrinho - elo - quadrinho - elo - ... - elo - quadrinho", onde cada elo é fronteira comum dos quadrinhos entre os quais está localizado nesta seqüência.

b) Infinito: Uma seqüência infinita "quadrinho - elo - quadrinho-..." onde cada elo é fronteira comum dos quadrinhos entre os quais está localizado nesta seqüência.

Se, para cada dois quadrinhos consecutivos, o elo que os separa for aberto, o corredor será dito *aberto*.

5. Quadrinhos Amigos

Dois quadrinhos são chamados amigos se existe corredor aberto conectando-os. Utilizaremos o sinal de equivalência " $\sim$ " para dizer que dois quadrinhos são amigos.

Note que a amizade satisfaz todas as condições de equivalência:

1. $\forall x \in Q:\ x \sim x$
2. $\forall x, y \in Q:\ x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$
3. $\forall x, y, z \in Q\ :\ x \sim y\ ,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$

6. Teorema

Seja Π *papel quadriculado. Se temos dois quadrinhos* x *e* y *que não são amigos, logo acontece pelo menos um dos casos seguintes:*

a) *Existe contorno fechado separando* x *de* y *.*

b) *Existe caminho bi-infinito auto-evitante fechado separando* x *de* y *.*

Prova:

Consideremos o seguinte: Seja C um caminho bi-infinito no papel quadriculado. Para cada vértice de C atribuímos número inteiro, tal que cada passo de C vai de um vértice n para um vértice $n+1$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Logo, cada passo de n para $n+1$ deixa um quadrinho do lado esquerdo e outro país do lado direito. Chamaremos estes quadrinhos de E_n e D_n .
Chamemos um quadrinho *vizinho* de caminho C se pelo menos um lado deste quadrinho pertencer a C . Chamemos de $N(c)$ o conjunto de todos os quadrinhos vizinhos de C . Temos então que cada E_n e D_n são vizinhos de C .

Lema 1 *Para cada* n *, os quadrinhos* E_n *e* E_{n+1} *são amigos.*

Prova:

Consideremos três casos:

a) No vértice $n+1$ o caminho C vira à esquerda. Neste caso, $E_n = E_{n+1}$.

b) No vértice $n+1$ o caminho C não muda a direção. Neste caso, E_n e E_{n+1} têm um lado comum, o qual não pertence a C .

c) No vértice $n+1$ o caminho C vira à direita. Neste caso, existe um quadrinho $E_n^{'}$, o qual tem lados comuns com E_n e E_{n+1} , os quais não pertencem a C .

Em todos os três casos, E_n e E_{n+1} são amigos, pois teremos corredor conectando-os, o qual não cruza o caminho C . Logo, ambos pertencem à mesma classe. O mesmo vale para os quadrinhos D_n e D_{n+1} . *O lema 1 está provado.*

Lema 2 *Todos os* E_n *são amigos e todos os* D_n *são amigos.*

Prova:

Tomemos E_m e E_n , onde $m < n$. Logo, E_m e E_{m+1} são amigos, também E_{m+1} e E_{m+2} , etc. Como E_{n-1} e E_n também são amigos, teremos então, devido ao *lema 1*, que E_m e E_n são amigos. Consequentemente, também teremos que D_m e D_n são amigos. *O lema 2 está provado.*

Lema 3 *Cada quadrinho possui um amigo em* $N(c)$.

Prova:

Escolhemos qualquer quadrinho w em Q . Com certeza temos corredor conectando w ao quadrinho x . Caso este corredor não esteja cruzando C , x e w são amigos. Caso contrário, percorremos este corredor iniciando em w e paramos antes do primeiro cruzamento. Então teremos um corredor conectando w a um quadrinho vizinho de C. *O lema 3 está provado.*

Lema 4 *Existem exatamente duas classes de equivalência.*

Prova:

Tomemos um elo de nosso caminho C. Tomemos quadrinhos E_0 e D_0 separados com este elo. Denotamos A o conjunto de amigos de E_0 e B o conjunto de amigos de D_0. Provemos que A e B são classes de equivalência, ou seja:

I) A e B não tem elementos comuns.

II) Cada quadrinho pertence a A ou a B.

Denotamos $A' = A \cap N$ e $B' = B \cap N$

É claro que $A' = \{E_n, \quad n \in \mathbb{Z}\} \qquad B' = \{D_n, \quad n \in \mathbb{Z}\}$

Prova de (I):

Seja q um quadrinho amigo de E_0 e D_0. Então existirá um corredor não cruzando C, que conecta E_0 e D_0. Ou seja, $E_0 \sim D_0$. Logo, o corredor que os conecta criará uma barreira para C, de modo que C deixará de ser auto-evitando, ou seja, voltará a visitar um ou mais vértices novamente. Mas C é auto-evitando, e por isso o corredor que conecta E_0 e D_0 não existe, ou seja, E_0 e D_0 não podem ser amigos. Mas são amigos por hipótese. Isso é uma contradição. Logo, os conjuntos A e B não podem possuir elementos comuns. Ou seja: $A^{'} \cap B^{'} = \emptyset$. *A parte (I) está provada.*

Prova de (II):

Pelo *lema 3*, temos então que cada quadrinho será amigo, ou de um quadrinho em A' ou de um quadrinho em B'. Se q tem amigo em A', q é amigo de E_0

por transitividade de amizade. Caso contrário q é amigo de D_0 pela mesma razão. Logo, cada quadrinho pertence a A ou B. *A parte* (II) *está provada.*

O lema 4 está provado.

6.1. Conjunto Conectado

Diremos que um conjunto de quadrinhos é *conectado* se, para cada dois quadrinhos pertencentes a este conjunto, existir corredor conectando-os, o qual contém quadrinhos que só pertencem a este conjunto.

Lema 5 *Sejam* A, B *dois subconjuntos de* Q, *tais que* $A \cup B = Q$, $A \cap B = \emptyset$, *ambos não-vazios e conectados. Logo:*

a) *Se* A *ou* B *é finito, a fronteira entre eles é um contorno.*

b) *Se ambos* A *e* B *são infinitos, a fronteira entre eles é um caminho bi-infinito.*

Este lema é resultado conhecido na Topologia. Não será necessário prová-lo.

Denotamos R o conjunto de amigos de x e $S = Q \backslash R$. Sabemos também que Q é o conjunto de todos os quadrinhos no plano. Temos então que:

- $R \cup S = Q$, pois $R \subseteq Q$. Então, todos os outros quadrinhos pertencem a S.
- $R \cap S = \emptyset$, pois $S = Q \backslash R$. Logo, nenhum quadrinho de R pertence a S.
- R é não vazio, pois $x \in R$.
- S é não vazio, pois x e y não são amigos, ou seja, $y \in S$.

Lema 6 *O conjunto R é conectado.*

Prova:

Tomemos quaisquer quadrinhos $q_1, q_2 \in R$. Logo, temos que q_1 e q_2 são amigos de x, e pela relação de transitividade sabemos que q_1 e q_2 também são amigos. Como isto se aplica a quaisquer dois quadrinhos pertencentes a R, temos que R é conectado. *O lema 6 está provado.*

Definimos B como o conjunto dos quadrinhos que podem ser conectados ao quadrinho y com corredores, cujos todos os quadrinhos pertencem a S. Definimos também o conjunto A, onde $A = Q \backslash B$.

Lema 7 *Os conjuntos A e B satisfazem todas as condições do lema 5.*

Prova:

Podemos observar que, como $A = Q \backslash B$, então, $A \cup B = Q$ e $A \cap B = \emptyset$. Observemos agora que, como pelo menos o quadrinho y pertence a B, então B é não vazio. Considerando agora o conjunto A, sabemos que R pertence a A, e sabemos que R é não vazio. Logo A é não vazio.

- B **é Conectado**

Tomemos quaisquer quadrinhos q_1, $q_2 \in B$. Temos que q_1 pode ser conectado a y com corredor, o qual contém quadrinhos que só pertencem a B. O mesmo vale para o quadrinho q_2. Temos um corredor conectando os quadrinhos q_1 e y, e outro corredor conectando os quadrinhos y e q_2. Logo, temos um corredor conectando os quadrinhos q_1 e q_2 por intermédio do quadrinho y. Como isto pode ser aplicado a cada dois quadrinhos pertencentes a B, temos que B é conectado.

- A **é Conectado**

Sabemos que $A = Q\backslash B$. Tomemos qualquer quadrinho $q \in A$ e provemos que q é conectado com quadrinho x com um corredor, o qual contém quadrinhos que só pertencem a A. Sabemos também que R pertence a A. Consideremos dois casos:

1^o **caso:** $q \in R$. É evidente que q será conectado ao quadrinho x, pois R é o conjunto dos amigos de x. Logo, com certeza teremos corredor, o qual contém quadrinhos pertencentes a R conectando os quadrinhos q e x.

2^o **caso:** $q \in A\backslash R$. Suponhamos que A é não conectado. Logo, existe quadrinho $t \in A$, o qual não pode ser conectado ao quadrinho x com corredor em A. Denotamos T como o conjunto de quadrinhos conectados com t em A. Todos os quadrinhos em T não são amigos de x. Pois $T \neq Q$, existe quadrinho em T, cujo vizinho não está em T. Se este vizinho está em R, temos contradição. Se este vizinho está em B, também temos contradição.
Portanto, os conjuntos A e B satisfazem todas as condições do *lema 5. O lema 7 está provado.*

Lema 8 *Cada vez quando um quadrinho de A e um quadrinho de B são vizinhos, o seu lado comum está fechado*

Prova:

Sabemos que $x \in A$ e $y \in B$ não são amigos. Sabemos também que $A = Q\backslash B$. Então, existe uma fronteira entre os conjuntos A e B, a qual separa todos os quadrinhos contidos no conjunto A dos quadrinhos contidos no conjunto B. Se considerarmos dois quadrinhos vizinhos $u \in A$ e $v \in B$, temos que estes quadrinhos possuem um elo comum, o qual pertence à fronteira que separa os conjuntos A e B. Sabemos que $v \in B$ e sabemos também que o conjunto B é subconjunto de S, logo v sempre pertence a S. Como $v \in B$, seguinte definição de B, existe corredor conectando os quadrinhos v e y, o qual só contém quadrinhos pertencentes a S. Se $u \in S$, então utilizaremos o mesmo corredor para conectar u e y, sendo necessário ampliar este corredor em apenas um passo. Logo, u também pertence a B. Mas anteriormente escolhemos $u \in A$. Esta contradição prova que u não pertence a S, logo $u \in R$. Agora, provemos pela contradição que o elo entre u e v está fechado. Suponhamos que este elo está aberto. Logo, como R é o conjunto dos amigos de x, então existe corredor aberto conectando os quadrinhos x e v. Logo x é amigo de v. Mas $v \in S$ e $S = Q \backslash R$, ou seja x e v não podem ser amigos. Mas são amigos por hipótese, pois o elo comum entre u e v está aberto. Contradição. Esta contradição prova que o elo comum entre u e v está fechado. Logo, quando um quadrinho de A e um quadrinho B são vizinhos, o seu lado comum está fechado. *O lema 8 está provado.*

O nosso teorema é conseqüência de todos os lemas enunciados. Sabemos que x e y não são amigos, e que $x \in R$, e $y \in S$. R é o conjunto dos amigos de x e $S = Q \backslash R$. Pela definição de B, temos que $y \in B$, pois $B \subseteq S$. Sabemos também que $R \subseteq A$. Logo, $x \in A$. Pelo *lema 6*, R é conectado. Sabemos também que $A = Q \backslash B$. Logo, temos dois casos:

1. Se ambos R e S forem infinitos, teremos um caminho C, bi-infinito separando x e y. Todos os quadrinhos pertencentes a $N(c)$ satisfazem todas as condições dos lemas 1, 2 e 3. Como $x \in R$ e $R \in A$, e $y \in B$, $B \subseteq S$, pelo lema 8, todos os elos pertencentes a C são fechados;

2. Se R for finito, e S for infinito, teremos um contorno separando x e y. Como $x \in R$, $R \subseteq A$, $y \in B$, $B \subseteq S$ e $S = Q \backslash R$, pelo *lema 8*, todos os elos desse contorno também serão fechados.

Nos casos 1 e 2, o papel quadriculado é dividido em duas classes de equivalência, A e B (*lema 4*). Pelo *lema 7*, A é conectado e B é conectado. Logo, pelo *lema 5* teremos que x e y sempre estarão separados, ou por caminho bi-infinito fechado, ou por contorno fechado. *O teorema está provado.*

11. Referências

(1) Toom, A. (2001) Contornos, conjuntos convexos e autômatas celulares. Curso ministrado no 23^o Colóquio Brasileiro de Matemática (IMPA) Rio de Janeiro-RJ-Brasil.

(2) Lima, P. F. (2002) *Teoremas de Dualidade usados na Percolação.* Tese de Mestrado em Estatística, Univesidade Federal de Pernambuco, Recife.