UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Sobre valores críticos para alguns processos estocásticos com interação local no R^2

ORIENTADOR: André Toom
ALUNO: Daniel Cassimiro Carneiro da Cunha

ÁREA: Probabilidade e Estatística
SUB-ÁREA: Processos estocásticos, interação local, valores críticos, autômatos celulares, eroders

RESUMO Nós completamos a prova para uma condição necessária e suficiente para a existência de valores críticos não-triviais para algumas classes de processos estocásticos com interação local, onde o espaço é o plano real. Nossos operadores são superposições de um operador determinístico e um ruído aleatório unilateral, onde o ruído e padrão e as propriedades geométricas do operador determinístico são cruciais.

A teoria de processos aleatórios com interação local tem sido usada amplamente como ferramenta para o estudo de sistemas físicos que envolvem tempo, espaço e um conjunto de possíveis estados. A necessidade de se ter um modelo mátematico que descreve bem estes sistemas fez com que houvesse um rápido desenvolvimento da teoria nas últimas décadas. Entretanto, grande parte da teoria ainda aparece como uma pilha de estudos feitos de maneira isolada.

O problema de ergodicidade para processos aleatórios com interação local merece atenção por varias razões. Estes processos são úteis para modelar muitos fenômenos naturais e a ergodicidade ou a sua falta é uma de suas propriedades básicas. Sabe-se que o problema de ergodicidade para autômatos celulares é algoritmicamente insolúvel, mesmo no caso unidimensional discreto [1]. Assim, devemos procurar por classes especiais de processos, para os quais podemos apresentar critérios de ergodicidade. Um desses casos foi estudado em [2]. Vamos formular o resultado correspondente de maneira apropriada aqui. O espaço neste caso é o $\mathbb{Z}^2$. Vamos considerar operadores determinísticos $D : \Omega \to \Omega$, que estão sujeitos as seguintes condições, onde DS significa o resultado da aplicação do operador D ao conjunto $S \subseteq \mathbb{Z}^2$.

a) *Localidade:* Existe um raio de interação local r tal que a pertinência do ponto $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ ao conjunto DS depende apenas do conjunto

$$\{(a,b) \in S : |a-i| + |b-j| \leq r\}$$

b) *Uniformidade:* D comuta com todas as translações de Ω induzidas por translações do espaço $\mathbb{Z}^2$.

c) *Monotonicidade:* Se $S \subset S'$, então $DS \subseteq DS'$.

d) *Não-trivialidade:* D não mapeia todos os conjuntos para um só conjunto.

É fácil de provar que para todo operador D satisfazendo estas condições existe uma família não-vazia finita Ψ de subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^2$, tal que a ação de D pode ser apresentada como

$$DS = \bigcap_{\psi \in \Psi} (S + \psi), \tag{1}$$

onde + significa adição de vetores: $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$. Em $[2,3]$ análogos dos elementos de Ψ eram chamados de zero-conjuntos. Chamamos D de um *eroder* se para todo conjunto limitado $S \subset \mathbb{Z}^2$ existe t tal que $D^t S = \emptyset$. Se D é um eroder, o conjunto vazio é similar ao estado de equilíbrio estável em sistemas físicos, que é uma razão para se estudar eroders. É interessante que para estuda-los mesmo no caso discreto precisamos imergir $\mathbb{Z}^2$ num espaço real $\mathbb{R}^2$, onde nos definimos o conjunto $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ como a intersecção de todos os envelopes convexos de todos os $\psi \in \Psi$. O Teorema 1 (abaixo) mostra que σ é relevant ao comportamento dos operadores determinísticos e aleatórios e portanto é um exemplo da importância da geometria de interações para o estudo da ergodicidade.

Vamos definir um operador aleatório G_ε, onde $\varepsilon \in [0,1]$ é um parâmetro. Por definição, G_ε transforma qualquer conjunto $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ em um conjunto aleatório $S \cup B$, onde B é um conjunto aleatório que inclui qualquer elemento de $\mathbb{Z}^2$ com probabilidade ε independentemente de outros elementos. Vamos interativamente aplicar a superposição $G_\varepsilon D$ (onde D é aplicado primeiro, e G_ε depois) ao conjunto vazio como a condição inicial. É claro que, cada aplicação de $G_\varepsilon D$ envolve a geração de um novo conjunto aleatório. Assim obtemos uma seqüência de conjuntos aleatórios

$$(G_\varepsilon D)^t \emptyset. \tag{2}$$

Já que todos estes conjuntos aleatórios são uniformes no espaço, cada um deles tem uma *densidade*, que pode ser definida como a probabilidade da origem pertencer a este conjunto. O seguinte teorema é uma conseqüência dos resultados de [2].

Teorema 1 *Para todos os operadores D definidos acima:*

a) Se σ é não-vazio, então D não é um eroder e a densidade dos conjuntos tende para 1 quando $t \to \infty$ para todo ε positivo.

b) Se σ é vazio, então D é um eroder e a densidade dos conjuntos (2) tende a 1 quando $t \to \infty$ apenas para valores suficientemente grandes de ε. Para ε pequeno, esta densidade tende para um limite, que é menor que 1 e tende para zero quando $\varepsilon \to 0$.

O presente artigo tem, como objetivo central, completar a prova de um resultado similar para o espaço continuo. Devemos ser cuidadosos com nossas definições de modo a evitar conjuntos não-mensuráveis. Existem varias maneiras de evitar este problema e nós escolhemos a seguinte. Para todo $r > 0$ o conjunto $\{p \in \mathbb{R}^2 : |p| \leq r\}$, onde $|\cdot|$ é a norma euclidiana, será denotado por $Disco(r)$. Para toda família não-vazia Ψ de subconjuntos fechados do $Disco(1)$ nós definimos um operador determinístico D_Ψ pela seguinte regra: para todo fechado $S \subseteq \mathbb{R}^2$ o resultado da aplicação de D_Ψ a S é definido como

$$D_\Psi S = \bigcap_{\psi \in \Psi} (S + \psi), \tag{3}$$

onde o sinal de adição indica soma vetorial de conjuntos no $\mathbb{R}^2$ como um espaço vetorial. Elementos de Ψ são análogos dos elementos de Ψ em (1), mas agora eles são subconjuntos de um espaço continuo e o conjunto Ψ pode ser infinito. Já que todos os elementos de Ψ são fechados, D_Ψ transforma qualquer conjunto fechado em um conjunto fechado; Isto é importante para garantir que todos os conjuntos (4) são mensuráveis.

O operador aleatório também tem que ser definido cuidadosamente agora para que possamos evitar conjuntos não-mensuráveis. Por esta razão, nós usamos um operador de crescimento aleatório bem especifico $G_{\varepsilon,d,r}$, que transforma qualquer conjunto fechado $S \subseteq \mathbb{R}^2$ em um conjunto aleatório $S \cup \Gamma_{\varepsilon,d,r}$, onde $\Gamma_{\varepsilon,d,r}$, que nós chamamos de *conjunto de crescimento*, é um conjunto aleatório definido como se segue: Primeiro, para todo $d > 0$ nós denotamos $\mathbb{Z}_d$ o conjunto $\{k \cdot d : k \in \mathbb{Z}\}$. Escolhemos um sistema de coordenadas ortogonal no nosso plano e para cada d positivo, denotamos $\mathbb{Z}_d^2$ o conjunto dos pontos com ambas coordenadas x, y pertencentes a $\mathbb{Z}_d$. O conjunto de crescimento é a união de discos fechados de raio r e centros nos pontos pertencentes a $\mathbb{Z}_d^2$, cada um tomados com probabilidade ε independentemente dos outros. Note que $\Gamma_{\varepsilon,d,r}$ é fechado q.c. Nós sempre tomaremos $r \geq d/\sqrt{2}$ porque do contrario mesmo todos os nossos discos juntos não cobrem o plano. Estamos interessados no comportamento dos conjuntos aleatórios

$$(G_{\varepsilon,d,r} D_\Psi)^t \emptyset \tag{4}$$

resultantes de t aplicações da composição $G_{\varepsilon,d,r} D_\Psi$ (Primeiro D_Ψ, depois $G_{\varepsilon,d,r}$) a condição inicial $\emptyset$, que significa o conjunto aleatório degenerado concentrado no conjunto vazio. (Nós esperamos que isto não cause nenhuma confusão se denotarmos qualquer conjunto aleatório concentrado em um mesmo conjunto por ele mesmo.) É claro, toda aplicação de $G_{\varepsilon,d,r}$ envolve a geração de um novo conjunto aleatório $\Gamma_{\varepsilon,d,r}$. Note que o conjunto (4) é fechado q.c. e que a intersecção dele com qualquer disco é uma combinação linear finita de conjuntos aleatórios degenerados, em que cada um deles se concentra em um só conjunto. Isso garante que todas as nossas definições façam sentido. Chamamos a *densidade* no tempo t o limite

$$Densidade(t) = \lim_{q \to \infty} \frac{1}{\pi q^2} E|Disco(q) \cap (G_{\varepsilon,d,r} D_\Psi)^t \emptyset|, \tag{5}$$

onde E é a esperança matemática e $|\cdot|$ significa medida, que existe q.c. porque o conjunto é fechado q.c. A existência do limite é fácil de provar (Ao contrario do caso discreto, nós não falamos do limite de conjuntos aleatórios, porque isto não é tão fácil de definir no caso continuo.)

Nosso objetivo é estender o Teorema 1 para o caso continuo. O análogo literal do Teorema 1 é falso para o espaço continuo, porque neste caso um operador pode ser um eroder mesmo quando σ é não-vazio (veja Exemplo 3 abaixo). Entretanto, a definição a seguir salva o dia: Chamamos D_Ψ de um *eroder linear* se existe uma constante positiva C tal que t aplicações de D_Ψ transforma todo conjunto limitado S em um conjunto vazio assim que t exceder C vezes o diametro de S. O nosso resultado principal é o analogo do Teorema 1 a seguir:

Teorema 2 *Para todos os operadores D_Ψ definidos por (3):*

a) Se σ é não-vazio, então D_Ψ não é um eroder linear e a densidade dos conjuntos aleatórios (2) tende a 1 quando $t \to \infty$ para todo ε.

b) Se σ é não-vazio, então D_Ψ é um eroder linear e a densidade dos conjuntos aleatórios (4) tende a 1 quando $t \to \infty$ apenas para valores grandes o suficiente de ε. Para valores pequenos o suficiente de ε esta densidade tende a um limite, que é menor que 1 e tende a zero quando $\varepsilon \to 0$.

A maioria das afirmações do Teorema 2 foram provadas em [3] em qualquer dimensão. A única afirmação não provada foi a segunda parte da afirmação a): Se σ for não-vazio, então a densidade dos conjuntos aleatórios (4) tende a 1 para qualquer ε positivo. O objetivo central deste artigo é provar isto, entretanto isso será feito apenas para o caso bi-dimensional. Um resultado similar é provavelmente verdadeiro em todas as dimensões, mas necessita de uma prova mais elaborada. Mas primeiro vamos considerar alguns exemplos.

Exemplo 1. Vamos considerar um triangulo eqüilátero T com lado 1 e centro na origem. Os elementos de Ψ são triplas de pontos dispostos um à um em todos os três lados deste triangulo. Neste caso σ é vazio, então o operador é um eroder e existe um valor critico de ε.

Exemplo 2. Vamos considerar um quadrado Q com lado 1 e centro na origem. Os elementos de Ψ são quadruplas de pontos dispostos um à um em todos os quatro lados deste quadrado. Neste caso σ é não-vazio e o operador não é um eroder, então não existe valor critico de ε.

Exemplos 1 e 2 não mostram nada de novo comparado ao caso discreto, mas o exemplo 3 mostra.

Exemplo 3. Os elementos de Ψ são arcos fechados com centro O e raio 1, cuja medida em radianos é π, isto é metade de uma circunferência do Disco(1). O conjunto σ é não-vazio: consiste de um ponto O. Neste caso, D_Ψ é um eroder mas não é um eroder linear: São necessárias $\asymp R^2$ aplicações de D_Ψ para transformar um disco com raio R em um conjunto vazio. (Mais geralmente, para todo eroder não-linear o numero de aplicações de D, que são necessárias para erodir um disco de raio R, não é menos que $\asymp R^2$, mas pode ser muito maior para R grande.) Este exemplo ilustra a maior dificuldade com que lidamos neste artigo. Você pode querer manter isto em mente enquanto lê a prova geral subseqüente da afirmação a) do nosso teorema.

Na nossa prova nós usamos as noções de monotonicidade e ordem. Vamos chamar uma função f em um conjunto de subconjuntos fechados do $\mathbb{R}^2$ *local* se $f(S)$ depende apenas da intersecção de S com algum disco. Vamos chamar uma função local f de *monótona* se $S_1 \subset S_2$ implicar $f(S_1) \leq f(S_2)$. Dados uma função local f e um conjunto aleatório μ, denotamos $E(f|\mu)$ a esperança de f com relação a μ (se existir). Dados dois conjuntos aleatórios μ_1, μ_2 escrevemos $\mu_1 \prec \mu_2$ se $E(f|\mu_1) \leq E(f|\mu_2)$ para toda função monótona f. Chamamos um operador F agindo sobre conjuntos aleatórios *monótono* se $\mu_1 \prec \mu_2$ implicar $F\mu_1 \prec F\mu_2$. É fácil mostrar que todos os nossos operadores D_Ψ e $G_{\varepsilon,d,r}$ são monótonos. Portanto $Densidade(t)$ é uma função não-decrescente de t e tem limite quanto $t \to \infty$. É fácil provar que para todo $d > 0$ e $r > d/\sqrt{2}$ este limite é igual a 1 desde que ε seja grande o suficiente.

Da mesma maneira que foi feito em [3] para conjuntos do tipo bloco, é fácil de provar que para todo real positivo $d_1, d_2, r_1 \geq d_1/\sqrt{2}, r_2 \geq d_2/\sqrt{2}$ e ε_1 existe um real positivo ε_2 tal que $\Gamma_{\varepsilon_1,d_1,r_1} \succ \Gamma_{\varepsilon_2,d_2,r_2}$ e existe ε'_2 tal que $\Gamma_{\varepsilon_1,d_1,r_1} \prec \Gamma_{\varepsilon'_2,d_2,r_2}$. Devido a estas desigualdades, é suficiente provar nossas afirmações apenas para alguns valores positivos de d e $r \geq d/\sqrt{2}$, os quais estamos livres para escolher. Daí fixamos $d = 0.1$ e $r = 100$ e $G_{\varepsilon,d,r}$ se torna $G_{\varepsilon,0.1,100}$, que nós abreviaremos por G_ε. Já que σ é não-vazio, podemos supor sem perda de generalidade que σ contém a origem.A partir de agora, nós iremos supor que algum D_Ψ tal que σ contém O e algum $\varepsilon > 0$ estão escolhidos. Nosso objetivo é provar que a densidade definida for (5) tende a 1 quando $t \to \infty$. Isso segue imediatamente do seguinte: Para todo $p \in \mathbb{R}^2$

e para todo real positivo q,

$$\lim_{t\to\infty} \text{Prob}(p + Disco(q) \subseteq (G_\varepsilon D_\Psi)^t \emptyset) = 1. \tag{6}$$

Resta provar (6). Vamos provar (6) para $p = O$, a prova geral é a mesma. Note que para todo $\varepsilon > 0$ a expressão $(1-(1-\varepsilon)^n)^n$ tende a 1 quando $n \to \infty$. Usando isto, vamos escolher o menor natural n tal que $(1-(1-\varepsilon)^n)^n \geq 0.99$. Vamos definir a seqüência

$$q_k = 1000n \cdot 2^n \cdot 2^k, \text{ onde } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

e provar que para todo $q = q_k$,

$$\text{Prob}(Disco(2q) \subseteq (G_\varepsilon D_\Psi)^{100q\cdot n\cdot 2^n} Disco(q)) \geq 1 - q \cdot e^{-q}. \tag{7}$$

Vamos explicar poque (7) implica (6). O produto infinito

$$\prod_{k=k_0}^{\infty} (1 - q_k \cdot e^{-q_k}), \text{ onde } k_0 = 0, 1, 2, \ldots.$$

é uma estimativa por baixo da probabilidade de crescimento ilimitado do nosso disco na condição de que o conjunto inicial inclua $Disco(q_{k_0})$ em algum tempo inicial. É fácil verificar que todos os fatores deste produto são positivos e que a soma dos seus logaritmos converge, portanto o produto infinito converge para algum numero positivo que tende a 1 quando k_0 tende para ∞. Mas um disco com qualquer raio tem probabilidade positiva de aperecer como parte de (4) em qualquer lugar e em qualquer tempo. Assim, pelo menos um deles irá crescer para o infinito q.c. (Na realidade, a lei zero-um está sendo aplicada aqui.)

Resta provar (7). Vamos considerar o espaco de configurações $\mathbb{R}_+^q$ e um mapa Π transformando qualquer configuração $a = (a_0, \ldots, a_{q-1})$ neste espaço em um conjunto fechado $\Pi(a) \subset \mathbb{R}^2$ cercado por um poligono $S_0, \ldots, S_{q-1}$ cujos vértices S_i são definidos por suas coordenadas polares, ângulo ϕ e raio ρ:

$$\phi(S_i) = \frac{2\pi i}{q} \text{ e } \rho(S_i) = a_i \text{ para } i = 0, \ldots, q-1.$$

Para provar (7), é suficiente provar que para todo $q = q_k$,

$$\text{Prob}(\Pi(\underbrace{3q, \ldots, 3q}_{q}) \subseteq (G_\varepsilon D_\Psi)^{10q\cdot n\cdot 2^n} \Pi(\underbrace{q, \ldots, q}_{q})) \geq 1 - q \cdot e^{-q}. \tag{8}$$

Vamos explicar porque (8) implica (7). Suponha que nós temos um $Disco(q)$, onde $q = q_k$, como a configuração inicial. Note que $\Pi(q, \ldots, q)$ é um polígono regular inscrito na circunferência do $Disco(q)$. De acordo com (8), $10q \cdot n \cdot 2^n$ aplicações de $G_\varepsilon D_\Psi$ transforma $\Pi(q, \ldots, q)$ em um conjunto contendo $\Pi(3q,\ldots,3q)$ com uma probabilidade de pelo menos $1-q\cdot e^{-q}$. Já que $Disco(q)\supset\Pi(q,\ldots q)$, o mesmo é verdadeiro do $Disco(q)$ da monotonicidade. Mas $\Pi(3q,\ldots,3q)$ contém $Disco(2q)$, donde (7) segue-se.

Resta provar (8). Vamos considerar o seguinte processo de crescimento, cujo espaço de configuração é $\mathbb{R}^q$. Primeiro nós definimos um operador determinístico $\overline{D}:\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^q$ que transforma qualquer $(a_0,\ldots,a_{q-1})$ em $(b_0,\ldots,b_{q-1})$, onde

$$b_i=\frac{a_i+\min(a_{i-1},a_i,a_{i+1})}{2}-\frac{4}{q}\ \text{para todo } i=0,\ldots,q-1, \tag{9}$$

onde $i-1$ e $i+1$ são modulo q.

Nós também definimos um operador de crescimento aleatório $\overline{G}_{\varepsilon,\delta}$ que age em medidas normalizadas no $\mathbb{R}^q$ transformando qualquer $a\in\mathbb{R}^q$ em uma medida produto, induzida por variáveis aleatórias i.i.d. $\overline{g}_i$, todas iguais a δ com probabilidade ε e 0 com probabilidade $1-\varepsilon$ com o mapa

$$b_i=\min(a_i+\overline{g}_i,3q). \tag{10}$$

Nós provaremos que para todo natural t

$$(G_\varepsilon D_\Psi)^t\Pi(\underbrace{q,\ldots,q}_{q})\succ\Pi(\overline{G}_{\varepsilon,0.1}\overline{D})^t(\underbrace{q,\ldots,q}_{q}), \tag{11}$$

onde $\overline{G}_{\varepsilon,0.1}$ é $\overline{G}_{\varepsilon,\delta}$ com $\delta=0.1$. Ainda nós provaremos que

$$\text{Prob}\left(\min_i(a_i)\geq 3q|(\overline{G}_{\varepsilon,0.1}\overline{D})^{100q\cdot n\cdot 2^n}(\underbrace{q,\ldots,q}_{q})\right)\geq 1-q\cdot e^{-q}, \tag{12}$$

onde $\text{Prob}(A|\mu)$ significa a probabilidade do evento A em relação a medida μ.

Antes de provar (11) e (12), vamos explicar porque eles implicam em (8). Vamos considerar as probabilidades do evento "o conjunto aleatório resultante contém $\Pi(3q,\ldots,3q)$"em relação a ambas as medidas em (11), onde $t=100q\cdot n\cdot 2^n$. Já que a função indicadora deste evento é monótona, (11) implica em uma desigualdade no mesmo sentido entre estas probabilidades:

$$\text{Prob}\left(\Pi(\underbrace{3q,\ldots,3q}_{q})\subseteq(G_\varepsilon D_\Psi)^{100q\cdot n\cdot 2^n}\Pi(\underbrace{q,\ldots,q}_{q})\right) \tag{13}$$
$$\geq \text{Prob}\left(\Pi(\underbrace{3q,\ldots,3q}_{q})\subseteq\Pi(\overline{G}_{\varepsilon,0.1}\overline{D})^{100q\cdot n\cdot 2^n}\Pi(\underbrace{q,\ldots,q}_{q})\right).$$

De (12), a probabilidade do lado direito da desigualdade não é menos que $1-q\cdot e^{-q}$, de modo que a probabilidade do lado esquerdo da desigualdade também não, o que implica em (8). Agora vamos provar (11) por indução usando a desigualdade

$$G_\varepsilon D_\Psi \Pi \succ \Pi \overline{G}_{\varepsilon,0.1} \overline{D} \qquad (14)$$

como o passo de indução. É suficiente provar (14) apenas quando ambas as partes são aplicadas à configurações, onde todos os componentes estão entre $q/2$ e $3q$. Vamos explicar porque. De acordo com (9), o mínimo de componentes pode diminuir no máximo por $4/q$ a cada aplicação de $\overline{D}$ e não pode decrescer quando $\overline{G}_{\varepsilon,\delta}$ é aplicado. Portanto, no decorrer de $100q \cdot n \cdot 2^n$ aplicações de $\overline{G}_{\varepsilon,\delta}\overline{D}$ o mínimo de componentes pode decrescer no máximo por $400n \cdot 2^n$, de modo que todos os componentes das configurações resultantes não será menos que $q - 400n \cdot 2^n > q/2$ durante todo o tempo de 0 à $100q \cdot n \cdot 2^n$. O máximo de componentes nunca irá exceder $3q$ devido a (10).

Por sua vez, (14) decorre destas duas desigualdades, onde ambos os lados aplicados aos elementos do $[q/2, 3q]^q$: 1) $D_\Psi \Pi \succ \Pi \overline{D}$ e 2)$G_\varepsilon \Pi \succ \Pi \overline{G}_{\varepsilon,0.1}$.

Vamos provar 1). Já que $O \in \sigma$, o resultado da aplicação de D_Ψ a qualquer semi-plano fechado contém este semi-plano. Vamos observar que no nosso processo $|a_{i,t} - a_{i+1,t}| < 0.2$ q.c., onde $i+1$ é modulo q. Os comprimentos dos lados de nossos polígonos são mínimos se $a_i \equiv q/2$ e neste caso eles são $q\text{sen}(\pi/q)$, que é maior que 3.O maior comprimento dos lados não excede 30, porque o raio não pode ser maior que $3q$ e $|a_i - a_{i+1}|$ é menor que 0.2. Observe ainda que os ângulos do nosso polígono não são menos que $\pi/2$. Devido a tudo isso, nós podemos representar a diferença entre $\Pi(a)$ e o resultado da aplicação de D_Ψ a ele como

$$\Pi(a) \backslash D_\Psi \Pi(a) \subseteq \bigcup_{\alpha_i < \pi} T_i,$$

onde $\backslash$ significa diferença entre conjuntos, α_i é a medida em radianos do ângulo $S_{i-1}S_iS_{i+1}$ e T_i é alguma figura na vizinhança de S_i, que nós iremos examinar. Vamos nos concentrar em T_0. As coordenadas ortogonais dos três pontos relevantes são

$$\begin{aligned} &S_0 = (a_0, 0), \\ &S_1 = (a_1 \cos(2\pi/q), a_1 \text{sen}(2\pi/q)), \\ &S_{-1} = (a_{-1} \cos(2\pi/q), -a_{-1} \text{sen}(2\pi/q)). \end{aligned}$$

É suficiente examinar o caso $a_0 > \min(a_{-1}, a_0, a_1)$; Neste caso, como nós vimos, $a_0 < \min(a_{-1}, a_0, a_1) + 0.2$ e da monotonicidade nós podemos supor que $a_1 = a_{-1} = a_0 - \Delta$, onde $0 \leq \Delta < 0.2$. Vamos desenhar uma reta paralela a o eixo y tal que a distancia entre os seus pontos de intersecção com S_0S_1 e S_0S_{-1} é igual a 2. A distancia de S_0 à esta resta é uma estimativa por cima da quantidade pela qual a_1 decresce. É fácil de calcular que esta distancia é igual a

$$\frac{a_0}{a_0-\Delta}\tan\frac{\pi}{q}+\frac{\Delta}{a_0-\Delta}\cot\frac{2\pi}{q}.$$

A primeira parcela não excede $4/q$ e a segunda parcela não excede $\Delta/2$. Portanto 1) está provada. E quanto a 2)? 2) é verdade porque $G_\varepsilon = G_{\varepsilon,d,r}$ onde $d = 0.1$ é pequeno o bastante e $r = 100$ é grande o suficiente. Portanto (11) está provada.

Resta provar (12). Vamos considerar outro processo de crescimento aleatório cuja espaço de configurações é R^m, onde $m = q/n$ e uma configuração genérica é $a = (a_0, \ldots, a_{m-1})$. Nós consideramos dois operadores agindo sobre medidas no R^m. O primeiro operador, chamado $\overline{\overline{D}}$, é determinístico. Ele transforma qualquer configuração a em b definida por

$$b_i = \min(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) - \frac{4}{m}, \tag{15}$$

onde $i-1$ e $i+1$ são modulo m.

Outro operador $\overline{\overline{G}}_{\beta,\gamma}$ transforma qualquer configuração $a \in \mathbb{R}^m$ em uma medida produto induzida por variáveis aleatórias i.i.d. $\overline{\overline{g}}_i$, todas iguais a γ com probabilidade β e 0 com probabilidade $1-\beta$ com o mapa

$$b_i = \min(a_i + \overline{\overline{g}}_i, 3q). \tag{16}$$

Vamos definir um operador determinístico $Q : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m$ pela regra

$$(Qa)_i = \min_{ni \le j < n(i+1)} a_j.$$

Vamos provar que

$$Q(\overline{G}_{\varepsilon,0.1}\overline{D})^{nt}(\underbrace{q,\ldots,q}_{q}) \succ (\overline{\overline{G}}_{\beta,\gamma}\overline{\overline{D}})^t Q(\underbrace{q,\ldots,q}_{q}) \tag{17}$$

para todo natural t, onde

$$\beta = (1-(1-\varepsilon)^n)^n \ge 0.99 \text{ e } \gamma = 0.1 \cdot (1/2)^n. \tag{18}$$

Vamos provar também que

$$\text{Prob}\left(\min_i(a_i) \ge 3q | (\overline{\overline{G}}_{\beta,\gamma}\overline{\overline{D}})^{100q\cdot 2^n}(\underbrace{q,\ldots,q}_{m})\right) \ge 1 - q\cdot e^{-q}. \tag{19}$$

Antes de provar (17) e (19) vamos explicar porque elas implicam (12). Vamos considerar probabilidades do evento $\min_i(a_i) \ge 3q$ em relação a ambas as medidas em (17), onde nós escolhemos $t = 100q \cdot 2^n$. Já que a função indicadora deste evento é monótona, (17) implica a desigualdade do mesmo

sentido entre estas probabilidades.
Mas de (19), a probabilidade a direita não é menor que $1 - q \cdot e^{-q}$, de modo que a probabilidade a esquerda também não é, o que implica em (12).

Agora vamos provar (17). Para $t = 0$ isto é evidente. Vamos argumentar por indução mas primeiro vamos provar que

$$Q(\overline{G}_{\varepsilon,0.1}\overline{D})^n \succ \overline{\overline{G}}_{\beta,\gamma}\overline{\overline{D}}Q, \tag{20}$$

onde β e γ são definidos em (18). É evidente que $Q\overline{D}^n \succ \overline{\overline{D}}Q$, donde $\overline{\overline{G}}_{\beta,\delta}Q\overline{D}^n \succ \overline{\overline{G}}_{\beta,\delta}\overline{\overline{D}}Q$. Vamos provar que

$$Q(\overline{G}_{\varepsilon,0.1}\overline{D})^n \succ \overline{\overline{G}}_{\beta,\delta}Q\overline{D}^n. \tag{21}$$

Para provar (21), é suficiente aplicar a ambos os lados a medida concentrada em uma configuração $a \in \mathbb{R}^q$.E acopla-los como segue: $\overline{\overline{g}}_i$ é igual a δ se o evento

$$\forall j \in [ni, n(i+1) - 1] \exists t \in [1, n] : \overline{g}_{j,t} = 1 \tag{22}$$

ocorre e é igual a zero caso contrario. Aqui $\overline{\overline{g}}_i$ define $\overline{\overline{G}}_{\beta,\delta}$ como em (16) e $\overline{g}_{j,t}$ define a t-ésima aplicação de $\overline{G}_{\varepsilon,0.1}$ no sentido de (10). Nós podemos supor que $\overline{g}_j$ são distribuídas como descrito na definição de $\overline{G}_{\varepsilon,0.1}$. A probabilidade do evento (22) é $\{1-(1-\varepsilon)^n\}^n = \beta$, donde $\overline{\overline{g}}_i$ são distribuídos como declarado na definição de $\overline{\overline{G}}_{\beta,\delta}$. Se $\overline{g}_{j,t} \equiv 0$, (21) é evidente. Agora vejamos como as componentes de ambos os lados aumentam se algum $\overline{g}_{j,t} > 0$. Para todo $i, j = 0, \ldots, q-1$ e todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ nós denotamos $Impacto(i, j, k)$ o ínfimo da fração y/x, onde y é a quantia pela qual a i-ésima componente de $\overline{D}^k a$ aumenta e x é a quantia pela qual a_j aumenta, quando todas as outras componentes de a permanecem inalteradas. É fácil de provar por indução sobre k que

$$\forall i, j, k : Impacto(i, j, k) \geq \begin{cases} (1/2)^k & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Portanto o evento (22) garante que a j-ésima componente de $(\overline{G}_{\varepsilon,0.1}\overline{D})^n$ é maior que a j-ésima componente de $\overline{D}^n a$ pelo menos por $0.1 \cdot (1/2)^n$ para todo j no intervalo $ni \leq j < n(i+1)$, donde a i-ésima componente de $Q(\overline{G}_{\varepsilon,0.1}\overline{D})^n$ a é maior que a i-ésima componente de $Q\overline{D}^n a$ pelo menos por $0.1 \cdot (1/2)^n$, donde (21) segue-se. Portanto (20) está provada, e com ela podemos provar (17) por indução.

Resta provar (19). Para todo $t \geq 0$ nós podemos representar a medida $(\overline{\overline{G}}_{\beta,\gamma}\overline{\overline{D}})^t(q, \ldots, q)$ como induzida por variáveis aleatórias i.i.d. $g_{i,t}$, que são iguais a γ com probabilidade β e 0 com probabilidade $1 - \beta$, com a condição inicial $a_{i,0} \equiv q$ e a regra indutiva

$$a_{i,t} = \min(a_{i-1,t-1}, a_{i,t-1}, a_{i+1,t-1}) + g_{i,t} - \frac{4}{m} \text{ para } t > 0,$$

onde $i-1$ e $i+1$ são modulo m. Vamos chamar nível t o conjunto $\{(i,t) : i = 0,\ldots,m-1\}$ e um caminho levando ao ponto (i,t) a seqüência $s_1, s_2, \ldots, s_t = i \in 1,\ldots,m-1$ tal que $(s_k - s_{k+1}) \in \{-1,0,1\}$(modulo m) para todo $k = 1,\ldots,t-1$.Vamos chamar o ganho deste caminho a soma $g_{s_1,1} + \ldots + g_{s_t,t} - 4t/m$. É evidente que $a_{i,t}$ é igual a q mais o mínimo dos ganhos de todos os caminhos levando a (i,t). (Essencialmente, estamos lidando com um caso especial de percolação de primeira passagem.) Portanto a desigualdade $a_{i,t} < 3q$ é equivalente a existência de um caminho levando a (i,t) cujo ganho é menos que $2q$, então

$$g_{s_1,1} + \ldots + g_{s_t,t} \leq 2q + \frac{4t}{m}.$$

Portanto para qualquer caminho levando ao nível t, a probabilidade de que o seu ganho seja menor que $2q$ não excede

$$\sum_{k=0}^{[h]} \binom{t}{k} \cdot \beta^k \cdot (1-\beta)^{t-k}, \text{ onde } h = 10 \cdot 2^n \cdot \left(2q + \frac{4t}{m}\right).$$

O número de caminhos que levam ao nível t é $m \cdot 3^{t-1}$. Portanto

$$\text{Prob}(\min_i(a_{i,t}) < 3q) \leq m \cdot 3^{t-1} \cdot \sum_{k=0}^{[h]} \binom{t}{k} \cdot \beta^k \cdot (1-\beta)^{t-k}.$$

Para todo $x \geq 1$ isto é menor que

$$m \cdot 3^t \cdot \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} \cdot x^{h-k} \cdot \beta^k \cdot (1-\beta)^{t-k} = m \cdot 3^t \cdot x^h \cdot (\frac{\beta}{x} + (1-\beta))^t.$$

Vamos tomar $x = 100$ e lembrar que $\beta \geq 0.99, t = 100q \cdot 2^n$ e $q \geq 1000n \cdot 2^n$, donde

$$h = 10 \cdot 2^n \left(2q + \frac{4t}{m}\right) \leq 10 \cdot 2^n (2q + 40n \cdot 2^n) < 30q \cdot 2^n.$$

Considerando tudo isso, (23) é menos que $q \cdot e^{-q}$. Portanto nós provamos (19) que completa a prova do nosso resultado principal, o Teorema 2.

Agradecimentos Eu agradeço Benjy Weiss por sua sugestão em usar conjuntos fechados na nossa definição de D_Ψ para assegurar que todas as nossas definições façam sentido.

Referências

[1] A. Toom, N. Vasilyev, O. Stavskaya, L. Mityushin, G. Kurdyumov, and S. Pirogov, Discrete local Markov systems. *Stochastic Cellular Systems: Ergodicity, Memory, Morphogenesis* (R. Dobrushin, V. Kryukov, and

A. Toom, eds.). *Nonlinear Science: Theory and Applications*, Manchester University Press, 1990, pp. 1-182.

[2] A. L. Toom, Stable and attractive trajectories in multicomponent sytems. *Multicomponent Random Systems* (R. Dobrushin and Ya. Sinai, eds.). *Advances in Probability and Related Topics*, vol. 6, Dekker, 1980, pp. 549-576.

[3] A. L. Toom, Monotonic evolutions in real space. *Locally Interacting Systems and Their Applications in Biology* (R. Dobrushin, V. Kryukov, and A. Toom, eds.). Lecture Notes in Mathematics, vol. 653, Springer, 1978, pp. 1-14.

Departamento de Estatística
Universidade Federal de Pernambuco
Recife/PE, 50740-540, Brasil
toom@cox.de.ufpe.br
toom@member.ams.org

Orientador *André Toom* **Aluno** *Daniel Cassimiro Carneiro da Cunha*