

O Processo de Stavskaya com Comprimento Variável

Frank Sinatra Gomes da Silva

Orientador: Andrei Toom
Co-orientador: Alex Dias Ramos

12 de agosto de 2013

Introdução

Objetivo

Definições iniciais

O Processo de Stavskaya Clássico

O Nosso Processo

O PSCV

Operador de interação nascimento

Operador de interação matança

Processo Singular

Um Cenário

Teorema Principal

Aproximação do Caos e Simulação do PSCV

Conclusões

- ▶ Até que ponto podemos confiar em simulação computacional no estudo de processos aleatórios?
- ▶ Não existe uma teoria geral para os processos aleatórios.
- ▶ Da mesma forma, não existe uma teoria geral para os processos de comprimento variável.
- ▶ Daí, a construção de diversos exemplos pode ser útil para a compreensão desta área.
- ▶ Vamos estudar um novo tipo de exemplo, que é de comprimento variável, chamado Processo de Stavskaya com Comprimento Variável (PSCV).

Objetivo

- ▶ Este processo constitui uma nova versão do bem conhecido Processo de Stavskaya Clássico (PSC).
- ▶ Todas as simulações do PSC e a aproximação do caos concordam qualitativamente com seus resultados teóricos.

Objetivo

A meta desta tese é estudar um exemplo de um novo tipo, isto é, um processo de comprimento variável, para ilustrar um aparente conflito entre simulação computacional de processos aleatórios e seu estudo teórico.

Definições iniciais

- ▶ Vamos denotar \mathbb{R} como sendo o conjunto dos números reais, \mathbb{Z} o conjunto dos números inteiros e \mathbb{Z}_+ o conjunto dos inteiros não negativos.
- ▶ O conjunto finito e não vazio \mathcal{A} será chamado de *alfabeto* e seus elementos de *letras*.
- ▶ Uma sequência finita de letras será chamada *palavra*. Λ será a palavra vazia.
- ▶ O conjunto de palavras em um alfabeto \mathcal{A} é chamado *dicionário* de \mathcal{A} e denotado por $dic(\mathcal{A})$.
- ▶ Chamemos de *espaço* o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} , cujos elementos chamaremos de *componentes*.

- ▶ Vamos denotar $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ o *espaço configuracional* o qual é o conjunto de sequências bi-infinitas cujos termos são elementos de \mathcal{A} .
- ▶ Vamos chamar *cilindro fino* ao conjunto \mathcal{C} da forma

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : x_i = a_i, \forall i \in [m, n]\},$$

onde $a_i \in \mathcal{A}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$.

- ▶ Na σ -álgebra gerada por esses cilindros finos vamos considerar medidas normalizadas em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.
- ▶ Chamamos uma medida de *uniforme* se esta é invariante sob translações.
- ▶ Vamos indicar por $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ o conjunto de medidas uniformes em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ e por convergência em $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ a convergência em todas as palavras de *dic*(\mathcal{A}).

- ▶ Chamamos uma δ -medida e indicamos por δ_a a medida concentrada na configuração em que todas as componentes são iguais a a , onde $a \in \mathcal{A}$.
- ▶ Um operador determinístico $D : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ age em configurações. Seja $j_1, j_2, \dots, j_n \in \mathbb{Z}$ uma lista a qual chamamos *vetores vizinhos* e seja $j + j_1, j + j_2, \dots, j + j_n$ os pontos aos quais chamamos *os vizinhos de j* . Então, a x_j -ésima coordenada é

$$(Dx)_j = f(x_{j+j_1}, x_{j+j_2}, \dots, x_{j+j_n}) \quad (1)$$

$\forall j \in \mathbb{Z}$ e f uma função de \mathcal{A}^n em \mathcal{A} .

- ▶ Um operador A é chamado aleatório ou probabilístico se ele age em medidas, isto é, $A : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

- ▶ A palavra *processo* aqui significa uma sequência de medidas uniformes normalizadas $\mu_n = \mu P^n$.
- ▶ Uma medida μ é *invariante* para P se $\mu P = \mu$.
- ▶ Diremos que P é *ergódico* se $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P^t$ existe e é o mesmo para toda medida μ . Caso contrário, P é dito *não ergódico*.
- ▶ Um operador P agindo em $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ é chamado *operador linear* se para cada $a, b \in \mathbb{R}$ e quaisquer $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$

$$(a \cdot \mu + b \cdot \nu) P = a \cdot (\mu P) + b \cdot (\nu P). \quad (2)$$

- ▶ Operadores ou processos os quais criam ou eliminam componentes são chamados *operadores de comprimento variável* ou *processos de comprimento variável*, respectivamente. Caso contrário os chamaremos de *operadores de comprimento constante* ou *processos de comprimento constante*.

O PSC

- ▶ O PSC usa \mathbb{Z} como conjunto de componentes. Cada componente k tem duas letras possíveis, chamadas *menos* e *mais*, cuja representação é \ominus e \oplus . Dessa maneira o espaço configuracional é $\{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$.
- ▶ O PSC é definido a partir de dois operadores, ambos de comprimento constante: *flip* denotado por $\text{Flip}_{\beta} : \mathcal{M}_{\{\ominus, \oplus\}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\{\ominus, \oplus\}}$ e *stav* denotado por $\text{Stav} : \{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$.
- ▶ Flip_{β} é um operador aleatório, o qual torna cada \ominus em \oplus com probabilidade β , independentemente do que acontece nas outras componentes.

- ▶ Stav é um operador determinístico o qual pode ser definido pela seguinte regra

$$(\text{Stav } x)_k = \begin{cases} \oplus, & \text{se } x_k = x_{k+1} = \oplus \\ \ominus, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3)$$

$\forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, k \in \mathbb{Z}$. Como $\mathcal{A} = \{\ominus, \oplus\}$, por (3) temos quatro possibilidades para o operador de interação Stav e usando nossa notação dada em (1) podemos escrever

$$(\text{Stav } x)_k = f(\oplus, \oplus) = \oplus, \quad (\text{Stav } x)_k = f(\oplus, \ominus) = \ominus,$$

$$(\text{Stav } x)_k = f(\ominus, \oplus) = \ominus, \quad (\text{Stav } x)_k = f(\ominus, \ominus) = \ominus.$$

- ▶ Usando nossas notações, o PSC pode ser definido como

$$\delta_{\ominus}(\text{Flip}_{\beta} \text{Stav})^t \quad (4)$$

onde a cada passo de tempo a ação de Flip_{β} ocorre antes de Stav.

- ▶ O PSC é ergódico se β é grande e não ergódico para valores de β pequenos.
- ▶ Todas as simulações computacionais do PSC realizadas até então, estão de acordo, pelo menos qualitativamente, com os resultados teóricos.

Processo de Stavskaya com Comprimento Variável

- ▶ Até aqui, chamamos todas as funções de \mathcal{M}_A em \mathcal{M}_A de operadores; vamos a partir de agora chamá-las de *operadores de interação*, reservando a palavra “operadores” para outro propósito.
- ▶ Os operadores de interação são casos particulares dos operadores de substituição.
- ▶ O PSCV possui um conjunto de componentes e um espaço configuracional idênticos àqueles definidos para o PSC.
- ▶ Ele é definido a partir da superposição de dois operadores de interação, cada um também de comprimento variável, *nascimento e matança*.

Os nossos operadores

O operador de substituição nascimento, $\Lambda \xrightarrow{\beta} \oplus$, com parâmetro $\beta \in [0, 1]$ será denotado por $\text{Birth}_{\text{inter}}$, em que **inter** significa interação. Este operador de interação transforma cada medida uniforme μ , com $\mu(\oplus) = x$, em uma medida uniforme $\mu \text{Birth}_{\text{inter}}$ com

$$\mu \text{Birth}_{\text{inter}}(\oplus) = \frac{x + \beta}{1 + \beta}. \quad (5)$$

O operador de substituição matança, $\oplus \ominus \xrightarrow{\alpha} \ominus$, com parâmetro $\alpha \in [0, 1]$, será denotado por $\text{Murder}_{\text{inter}}$. Este operador de interação transforma cada medida uniforme μ , com $\mu(\oplus) = y$, em uma medida uniforme $\mu \text{ Murder}_{\text{inter}}$ tal que

$$\mu \text{ Murder}_{\text{inter}}(\oplus) = \frac{y - \alpha z}{1 - \alpha z}, \quad (6)$$

onde $z = \mu(\oplus, \ominus)$ é a densidade de \oplus que é vizinho esquerdo de \ominus .

Finalmente, definimos o operador de interação VarStav como esta composição:

$$\text{VarStav} = \text{Birth}_{\text{inter}} \circ \text{Murder}_{\text{inter}}.$$

O PSCV é definido pela seguinte sequência de medidas

$$\mu_t = \delta_{\ominus}(\text{VarStav})^t, \quad (7)$$

em que desejamos saber o que acontece quando $t \rightarrow \infty$.

O Processo Singular

- ▶ O operador de interação VarStav é não linear, porém ele pode ser reduzido a uma sequência bi-infinita de processos i.i.d., cada um determinado por um operador linear, chamado *Singular*, e denotado por Single .
- ▶ A palavra *operador* será usada para qualquer cadeia de Markov homogênea em tempo discreto, com \mathbb{Z}_+ como seu conjunto de estados.
- ▶ Denotamos por \mathcal{N} o conjunto de medidas de probabilidade sobre \mathbb{Z}_+ .
- ▶ Para qualquer natural n denotamos por δ_n a medida de probabilidade sobre \mathbb{Z}_+ , concentrada no estado n .

- ▶ Dada uma sequência de medidas $\delta_{\ominus}(\text{VarStav})^t$ sobre $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, definiremos a sequência correspondente $\delta_0(\text{Single})^t$, em que Single é a composição de dois operadores.

Primeiro vamos definir o operador $\text{Birth} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, por que ele corresponde a ação de $\text{Birth}_{\text{inter}}$. Para todo $x, y \in \mathbb{Z}_+$

$$\text{Birth}(y \mid x) = \begin{cases} \binom{x+1}{y-x} \cdot \beta^{y-x} \cdot (1-\beta)^{2x-y+1}, & \text{se } x \leq y \leq 2x+1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (8)$$

Em que $y = x + \Delta_{\text{birth}}$, onde a variável aleatória Δ_{birth} tem uma distribuição binomial.

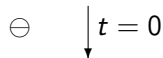
Outro operador, o qual denotamos por $\text{Murder} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ porque ele corresponde a ação de $\text{Murder}_{\text{inter}}$, age como segue:

$$\text{Murder}(y \mid x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } y = x - 1, \\ 1 - \alpha & \text{se } y = x, \\ 0 & \text{em todos os outros casos.} \end{cases} \quad (9)$$

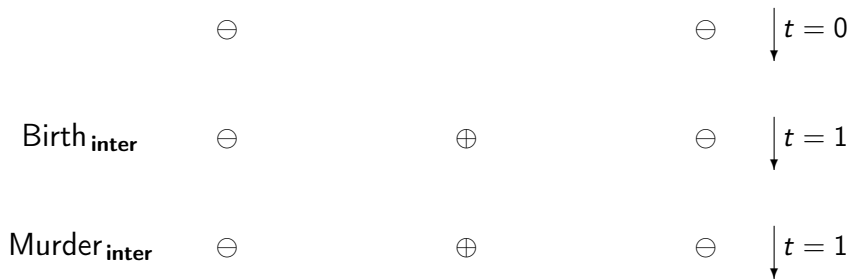
Finalmente, definimos o operador Single como a composição

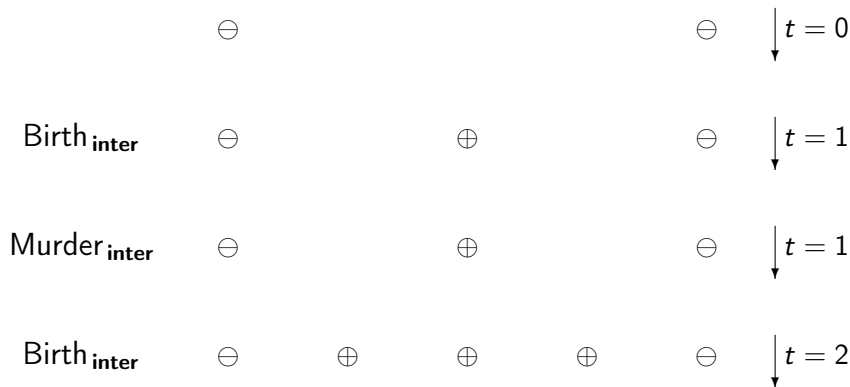
$$\text{Single} = \text{Birth} \circ \text{Murder} \quad (10)$$

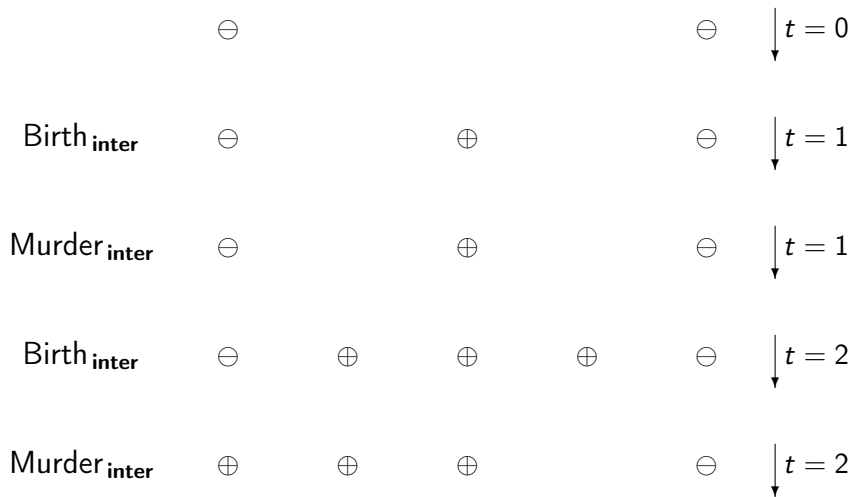
(primeiro Birth , depois Murder).











Lema Principal

Lema principal. *Para cada número natural t , na medida $\delta_{\ominus}(\text{VarStav})^t$, assumindo que um certo componente é um \ominus , o número de \oplus entre ele e o próximo menos é independente do número de \oplus entre todos os outros pares de menos consecutivos e tem a mesma distribuição da variável aleatória $\delta_0(\text{Single})^t$.*

Declaração do Teorema Principal

Nosso principal resultado é este:

$$\text{se } \alpha < 1 \text{ e } \beta > 0, \text{ então } \delta_{\ominus}(\text{VarStav})^t \rightarrow \delta_{\oplus} \text{ quando } t \rightarrow \infty, \quad (11)$$

em que convergência significa convergência em todos os cilindros finos. (11) é equivalente a seguinte condição:

Teorema principal.

$$\text{se } \alpha < 1 \text{ e } \beta > 0, \text{ então } \delta_{\ominus}(\text{VarStav})^t(\oplus) \rightarrow 1 \text{ quando } t \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Prova do Teorema Principal

Para provar o teorema principal usamos o seguinte corolário do lema principal:

$$\delta_{\ominus}(\text{VarStav})^t(\oplus) = \frac{\mathbb{E}(S_t)}{1 + \mathbb{E}(S_t)} \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}_+, \quad (13)$$

onde $\mathbb{E}(\cdot)$ significa esperança matemática e S_t é uma variável aleatória com distribuição $\delta_0(\text{Single})^t$. Precisamos também do seguinte:

$$\mathbb{E}(S_t) \rightarrow \infty \text{ quando } t \rightarrow \infty. \quad (14)$$

É evidente que (13), juntamente com (14) implicam em (12). Como (13) já está provada, resta-nos provar (14).

Crescimento Completo

- ▶ Dizemos que uma sequência de variáveis aleatórias reais (X_k) *crece completamente* quando $k \rightarrow \infty$, se para cada número real x a sequência de números $\mathbb{P}(X_k \leq x)$ tende a zero quando $k \rightarrow \infty$.

Lema 1

Se uma sequência (X_k) de variáveis aleatórias sobre \mathbb{Z}_+ cresce completamente quando $k \rightarrow \infty$, então a sequência de seus valores esperados $\mathbb{E}(X_k)$ tende a ∞ quando $k \rightarrow \infty$.

A partir de agora vamos nos concentrar em provar o seguinte

A sequência $\delta_0(\text{Single})^t$ cresce completamente quando $t \rightarrow \infty$.
(15)

É evidente que (15) e lema 1 implicam em (14). Assim, resta-nos apenas provar (15). Para isto, precisamos de alguns tipos de ordem parcial. Estas ordens são geralmente bem conhecidas, porém as incluímos em uma forma conveniente a nosso propósito.

Medidas sobre \mathbb{Z}_+

- ▶ Dizemos que um conjunto $L \subset \mathbb{Z}_+$ é *inferior* se

$$(x \in L, \quad y < x) \implies y \in L.$$

Qualquer conjunto inferior L ou é vazio, ou coincide com \mathbb{Z}_+ , ou é dado pela fórmula

$$L = \{n : n < n_0\} \quad \text{onde } n_0 \text{ é um parâmetro.}$$

- ▶ Dizemos que um conjunto $S \subset \mathbb{Z}_+$ é *superior* se

$$(x \in S, \quad x < y) \implies y \in S.$$

Da mesma forma, qualquer conjunto superior S ou é vazio, ou coincide com \mathbb{Z}_+ , ou é dado pela fórmula

$$S = \{n : n \geq n_0\} \quad \text{onde } n_0 \text{ é um parâmetro.}$$

- ▶ Dadas as medidas μ e $\nu \in \mathcal{N}$, dizemos que μ *precede* ν e escrevemos $\mu \prec \nu$ se

$$\mu(L) \geq \nu(L) \text{ para todo inferior } L,$$

que é equivalente a

$$\mu(S) \leq \nu(S) \text{ para todo superior } S.$$

- ▶ Chamamos uma medida μ sobre \mathbb{Z}_+ de *local*, se o conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ \mid \mu(n) \neq 0\}$ é finito.
- ▶ Chamamos um par (μ, ν) de *local* se μ e ν são locais.

\mathcal{N} -operadores

- ▶ Por cadeia de Markov queremos dizer uma cadeia de Markov com tempo discreto, homogênea no tempo, com um conjunto finito ou enumerável de estados.
- ▶ Vamos chamar um \mathcal{N} -operador qualquer cadeia de Markov finita com \mathbb{Z}_+ como conjunto de estados.
- ▶ Chamamos um \mathcal{N} -operador P local se para cada medida local μ sobre \mathcal{N} , a medida μP também é local.
- ▶ Um \mathcal{N} -operador P é chamado *monótono* se $\forall \mu, \nu : (\mu \prec \nu) \implies (\mu P \prec \nu P)$.

Lema 2

Seja P um \mathcal{N} -operador local. Então,

$$(P \text{ é monótono}) \iff (\forall m, n \in \mathbb{Z}_+ : m < n \implies \delta_m P \prec \delta_n P).$$

Prova. Na direção (\implies) a prova é fácil. Na outra direção (\impliedby) a prova segue do lema 4 visto na tese, que estabelece a existência de uma escada de μ a ν .

- ▶ Dados os \mathcal{N} -operadores P e Q , dizemos que P precede Q e escrevemos $P \prec Q$ se $\mu P \prec \mu Q$ para todo $\mu \in \mathcal{N}$.

Lema 3

Considere P e Q dois \mathcal{N} -operadores locais. Então

$$(P \prec Q) \iff (\forall n \in \mathbb{Z}_+ : \delta_n P \prec \delta_n Q).$$

Prova. Em uma direção (\Rightarrow) é evidente. Para provar na outra direção (\Leftarrow), além de usarmos o lema 2 visto na tese, é suficiente lembrar que P e Q são lineares e podemos escrever μ como segue

$$\mu = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \delta_{x+k},$$

em que todos os a_k são não negativos.

Lema 4

O \mathcal{N} -operador Murder é local e monótono para todo α .

Prova. Segue da definição de Murder.

Lema 5

O \mathcal{N} -operador Birth é local e monótono para todo β .

Prova. Segue do lema 3 e dos lemas 12 e 13 que estão na tese.

Os \mathcal{N} -operadores Sin e Sin_r

- ▶ Vamos definir outro \mathcal{N} -operador local chamado *sin* e denotado por Sin , cujo comportamento é similar àquele de Single , porém mais simples.

$$\text{Sin}(y|x) = \begin{cases} 2/3 & \text{se } q \leq x \text{ e } y = x + 1; \\ 1/3 & \text{se } q \leq x \text{ e } y = x - 1; \\ \gamma & \text{se } x < q \text{ e } y = x + 1; \\ 1 - \gamma & \text{se } 0 < x < q \text{ e } y = x - 1; \\ 1 - \gamma & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

- ▶ Aqui o número natural q e o número real γ são parâmetros, que vamos escolher de uma forma apropriada. Antes, considere o seguinte lema.

Lema 6

Seja $\beta \in (0, 1)$ fixo. Então, $\mathbb{P}(\Delta_{\text{birth}} \leq 1)$ tende a zero quando $x \rightarrow \infty$.

Prova. Por L'Hospital.

Levando em conta o lema 6,

$$\left. \begin{array}{l} \text{escolhemos } q \text{ como o menor número inteiro tal que} \\ \mathbb{P}(\Delta_{birth} \leq 1) \leq 1/3 \text{ para todo } x \geq q. \end{array} \right\} \quad (16)$$

Tendo escolhido q , definimos γ como segue:

$$\gamma = \min \left(\beta(1 - \alpha), \min \left\{ \text{Prob}(\Delta_{birth} \geq 2) \mid 0 < x < q \right\} \right). \quad (17)$$

Dessa forma, Sin está definido.

Para considerar cadeias de Markov finitas ao invés de infinitas, para cada natural r maior do que q , definimos um \mathcal{N} -operador, que denotamos por Sin_r .

$$\text{Sin}_r(y|x) = \begin{cases} \text{Sin}(y|x) & \text{se } 0 \leq x < r, \\ 2/3 & \text{se } x = y = r, \\ 1/3 & \text{se } x = r \text{ e } y = r - 1, \\ 0 & \text{em todos os outros casos.} \end{cases} \quad (18)$$

Sin_r tem $\{0, \dots, r\}$ como seu conjunto de estados.

Lema 7

Para q e γ definidos em (16) e (17) respectivamente e para qualquer $r > q$:

- (a) Sin_r , Sin e Single são locais e monótonos e
(b) $\text{Sin}_r \prec \text{Sin} \prec \text{Single}$.

Prova de (a): A localidade de todos estes operadores é evidente. Vamos provar a monotonicidade de Single . O \mathcal{N} -operador Single é monótono para todo α e β , pois ele é uma composição de Birth e Murder , ambos monótonos. Agora, vamos provar a monotonicidade de Sin . Do lema 2, é suficiente provar que

$$(m < n) \implies (\delta_m \text{Sin} \prec \delta_n \text{Sin}). \quad (19)$$

(19) é evidente quando $q \leq m < n$ ou $m < n < q$ ou $m < q < n$. Resta-nos fazer o caso $m = q - 1$ e $n = q$. Neste caso (19) segue da inequação $\gamma \leq 2/3$, veja (16). A monotonicidade de Sin_r segue de sua definição. Então, *item (a) do lema 7 está provado*.

Agora vamos provar o item (b). Provemos que $\text{Sin} \prec \text{Single}$, a prova do outro caso segue das definições de Sin_r e Sin . Do lema 3, segue que

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ : \delta_n \text{Sin} \prec \delta_n \text{Single}. \quad (20)$$

Vamos considerar dois casos.

Caso $n \geq q$: De (16) é suficiente notar que para todo $x \geq q$ a probabilidade que o número cresça no mínimo por um como um resultado da aplicação do \mathcal{N} -operador Single não é menor que $2/3$. Neste caso (20) está provada.

Caso $n < q$: (20) é uma consequência direta de (17), a definição de γ .

O lema 7 está provado.

Lema 8

Considere uma cadeia de Markov finita irredutível com um conjunto de estados $S = A \cup B$, onde $A \cap B$ é vazio. Para todo $x, y \in S$ denotamos por $p(y \mid x)$ a probabilidade de transição de x a y . Estas probabilidades formam a matriz de transição. É bem conhecido que, sob estas condições uma cadeia de Markov tem uma única medida invariante, a qual vamos denotar por μ . Vamos fixar dois estados $a \in A$ e $b \in B$, e assumir que $p(y \mid x) = p(x \mid y) = 0$ para todo $x \in A$ e $y \in B$ exceto o caso em que $x = a, y = b$. Então

$$\mu(a) \cdot p(b \mid a) = \mu(b) \cdot p(a \mid b). \quad (21)$$

A medida invariante de Sin_r

Sin_r é uma cadeia de Markov finita e irredutível qualquer que seja r . Sendo assim, ela tem exatamente uma medida invariante normalizada, que vamos denotar por λ_r .

Lema 9

A sequência (λ_r) cresce completamente quando $r \rightarrow \infty$.

Prova. *Provaremos o lema 9 ao escrever explicitamente a medida λ_r . Note que as únicas probabilidades de transição não nulas de Sin_r são aquelas que de qualquer s vão a $s - 1$, s ou $s + 1$. Isto nos permite usar o lema 8 para concluir, depois de alguma álgebra, o seguinte a respeito da medida invariante λ_r de Sin_r .*

Para qualquer $r' \in [q, r]$

$$\sum_{s=0}^{r'} \lambda_r(s) = \frac{\Phi + (2^{r'-q+1} - 1)}{\Phi + (2^{r-q+1} - 1)}.$$

O valor desta fração tende a zero quando r tende a ∞ , com todos os outros parâmetros, incluindo r' , mantidos fixos. Assim, a sequência λ_r cresce completamente quando $r \rightarrow \infty$. *O lema 9 está provado.*

Prova de (15)

Do lema 9 a sequência (λ_r) cresce completamente quando $r \rightarrow \infty$.
Em outras palavras

$$\forall r_1 : \lambda_r[0, r_1] \rightarrow 0 \text{ quando } r \rightarrow \infty,$$

onde $[0, r_1]$ é o segmento com extremos em 0 e r_1 . O mesmo em
mais detalhes:

$$\forall r_1 \forall \varepsilon > 0 \exists r_0 \forall r \geq r_0 : (\lambda_r[0, r_1] < \varepsilon/2). \quad (22)$$

Por outro lado, uma vez que Sin_r é irreduzível,

$$\delta_0 (\text{Sin}_r)^t \rightarrow \lambda_r \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Em particular

$$\forall r_1 : \delta_0 (\text{Sin}_r)^t [0, r_1] \rightarrow \lambda_r [0, r_1] \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Em mais detalhes

$$\forall r_1, \forall \varepsilon > 0 \exists r_0, \exists t_0 \forall r \geq r_0, \forall t \geq t_0 :$$

$$\left| \delta_0 (\text{Sin}_r)^t [0, r_1] - \lambda_r [0, r_1] \right| \leq \varepsilon/2. \quad (23)$$

Agora, combinando (22) e (23), temos que

$$\forall r_1 \forall \varepsilon > 0 \exists r_0 \exists t_0 \forall r \geq r_0, \forall t \geq t_0 : \delta_0 (\text{Sin}_r)^t [0, r_1] \leq \varepsilon.$$

Portanto, uma vez que $\text{Sin}_r \prec \text{Sin} \prec \text{Single}$, temos

$$\forall r_1 \forall \varepsilon > 0 \exists t_0 \forall t \geq t_0 : \delta_0(\text{Single})^t [0, r_1] \leq \varepsilon.$$

Portanto, segue (15), que implica na fórmula (11), que é nosso resultado principal. O teorema principal está provado.

Aproximação do Caos

- ▶ Chamamos de *operador caótico* e denotamos por $\mathcal{C} : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, o operador aleatório, que a cada passo de tempo mistura aleatoriamente todas as componentes do processo.
- ▶ Formalmente, para cada $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, a medida $\mu\mathcal{C}$ é uma medida produto com as mesmas frequências que há na medida μ , ou seja,

$$\mu(\oplus) = \mu\mathcal{C}(\oplus) \text{ e } \mu(\ominus) = \mu\mathcal{C}(\ominus),$$

lembrando que, em nosso caso, $\mathcal{A} = \{\ominus, \oplus\}$.

- ▶ O operador caótico permite aproximarmos um dado processo $\mu(P)^t$, sobre o espaço configuracional $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, por um outro processo $\mu(\mathcal{C}P)^t$ sobre o mesmo espaço.

- ▶ A aproximação do caos lida com a evolução da densidade das letras pertencentes ao alfabeto.
- ▶ Em nossa aproximação do caos, vamos lidar apenas com um parâmetro e para tal vamos escolher a densidade da letra \oplus .
- ▶ Seja f de $[0, 1]$ em $[0, 1]$ contínua. Seja x_t a densidade de \oplus no tempo t e $f(x_t) = x_{t+1}$.
- ▶ O estudo da aproximação do caos resume-se em estudar um sistema dinâmico discreto, o qual por sua vez será chamado *ergódico* se ele tiver um único ponto fixo, denotado por x_{fixo} , e se $\forall x \in [0, 1]$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x) = x_{fixo}. \quad (24)$$

Caso contrário, o sistema dinâmico é dito *não ergódico*.

Aproximação do caos para o PSCV

- ▶ A aproximação do caos realizada para o PSC, se comporta qualitativamente similar a este processo, inclusive no que diz respeito ao seu valor crítico ¹.
- ▶ O estudo do operador de interação $\text{Birth}_{\text{inter}} \text{Murder}_{\text{inter}}$ é substituído por um estudo do operador caótico $\mathcal{C} \text{Birth}_{\text{inter}} \text{Murder}_{\text{inter}}$, que, por sua vez, se resume no estudo do sistema dinâmico $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com parâmetros $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

¹Valor crítico não trivial $\beta^* \in [1/54, 1/2]$

- ▶ Concluimos que a aproximação do caos em $f(x) = \mu\mathcal{C} \text{ Birth}_{\text{inter}} \text{ Murder}_{\text{inter}}(\oplus)$ é ergódica se $\beta > \beta^*(\alpha)$ e não ergódica se $\beta \leq \beta^*(\alpha)$, onde

$$\beta^*(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha}{4 - \alpha}, & \text{se } \alpha > 0 \\ 0, & \text{se } \alpha = 0. \end{cases} \quad (25)$$

- ▶ Resolvendo $f(x) = x$ encontramos,

$$p_1 = \frac{\alpha(1 - \beta) - \sqrt{h(\beta)}}{2\alpha}, \quad p_2 = \frac{\alpha(1 - \beta) + \sqrt{h(\beta)}}{2\alpha} \quad \text{e} \quad p_3 = 1,$$

onde

$$h(\beta) = \beta^2(\alpha^2 - 4\alpha) + \beta(2\alpha^2 - 4\alpha) + \alpha^2.$$

Em detalhes

Se $h(\beta) < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x_0) = p_3 = 1$ para todo x_0 .

Se $h(\beta) = 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x_0) = \begin{cases} p_1 = p_2, & \text{se } x_0 \leq p_1 = p_2, \\ p_3 = 1, & \text{se } x_0 > p_1 = p_2. \end{cases}$

Se $h(\beta) > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x_0) = \begin{cases} p_1, & \text{se } x_0 < p_2, \\ p_2, & \text{se } x_0 = p_2, \\ p_3 = 1, & \text{se } x_0 > p_2. \end{cases}$

Simulação de Monte Carlo do Processo Singular

- ▶ Baseado em nosso lema principal, ao invés de simular o processo VarStav , vamos simular o processo Single , o qual é mais fácil de realizar.
- ▶ Vamos descrever um procedimento, que chamaremos *Imitação* e que é uma imitação de Monte Carlo de nosso processo. Este procedimento gera uma sequência de variáveis aleatórias na seguinte forma indutiva.

Imitação

Base de indução: $S_0 = 0$.

t -ésimo passo de indução:

- ▶ Fixe α e β no intervalo $[0, 1]$.
- ▶ Dado S_{t+1} , onde $t = 1, 2, 3, \dots$, realize dois procedimentos:

Primeiro procedimento imitando Birth:

- ▶ Gere uma variável aleatória Δ_{birth} com distribuição binomial, $\text{Bin}(S_t + 1, \beta)$.
- ▶ Faça $Y = S_t + \Delta_{birth}$.

Segundo procedimento imitando Murder:

Gere uma variável aleatória U distribuída uniformemente no intervalo $[0, 1]$. Assim, o que ocorre é um dos três casos seguintes:

- ▶ $S_{t+1} = Y - 1$, se $U < \alpha$ e $Y > 0$;
- ▶ $S_{t+1} = Y$, se $U > \alpha$ e $Y > 0$;
- ▶ $S_{t+1} = Y$, se $Y = 0$.

Condição de parada: dada uma constante $T = 1000000$, paramos quando $t = T$ ou $S_t > 10000$.

- ▶ Seja E uma variável binária que significa ergodicidade e assume o valor *sim*, se $S_t > 10000$; caso contrário, E assume o valor *não*.
- ▶ Consideramos 1000 valores de α , isto é, $\alpha_i = 0,001 \cdot i$, para $i = 1, \dots, 1000$. Para cada α fixo realizamos o seguinte.
- ▶ Usamos Imitação dentro de um ciclo crescente de β : Iniciamos com $\beta = 0$ e iterativamente realizamos Imitação para cada aumento de um milésimo de β . Repetimos isto até β atingir o valor 1 ou E assumir o valor *sim*, que é como ergodicidade é sugerida. Assim, obtemos um valor de β . Na verdade, realizamos este ciclo 10 vezes e guardamos a média aritmética dos 10 valores de β assim obtidos.

- ▶ Obtemos 1000 pares da forma (α_i, β_i) que nos ajudará a construir uma pseudo-curva denotada por “curva” de Monte Carlo (*M.C.*). A curva de Monte Carlo vai nos dar uma idéia do comportamento do nosso processo.
- ▶ Na figura a seguir mostramos a curva *M.C.*, juntamente com a curva obtida pela aproximação do caos, dada por $\beta^*(\alpha)$ e encontrada em (25), a qual denotamos por *caos*.

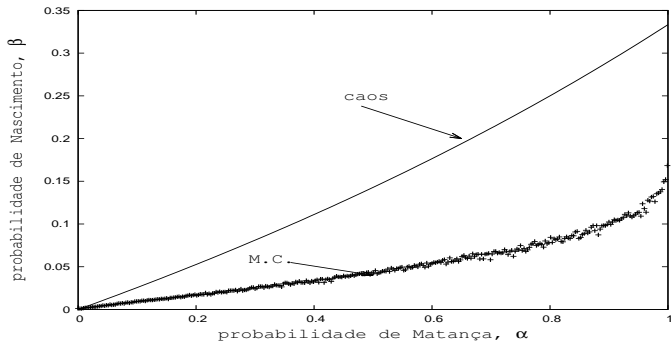


Figura: Estimação das linhas de transição entre ergodicidade e não ergodicidade para PSCV, obtidas pela aproximação do caos (caos) e método de monte carlo (M.C.)

Simulação de $\mathbb{E}(\max(S_t))$

- ▶ Para o processo Single foi realizado o seguinte experimento computacional: fixamos $\alpha = 0,1 \cdot i$, $i = 1, 2, \dots, 9$ e β variando de 0 até 0,13 com incremento de 0,001.
- ▶ Para cada par, executamos o procedimento *imitação*, definido anteriormente. Se no término de *imitação* for sugerido não-ergodicidade, $E = \text{não}$, salvamos o valor máximo que S_t tem assumido no processo. Da mesma forma, se no término de *imitação* for sugerido ergodicidade, $E = \text{sim}$, salvamos o valor máximo que S_t assumiu.
- ▶ Este valor máximo será denotado por $\max(S_t)$. Em outras palavras, dado um par (α, β) ,

$$\max(S_t) = \max\{S_t : t = 0, \dots, 100000\}.$$

- ▶ Para cada par, este experimento foi repetido 100 vezes.
- ▶ Assim, teremos 100 valores de máximo, $\max_i(S_t)$, $i = 1, 2, \dots, 100$, obtidos de cada experimento.
- ▶ Calculamos a média desses 100 valores de máximo, a qual denotamos por $\mathbb{E}(\max(S_t))$ e definimos como

$$\mathbb{E}(\max(S_t)) = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \max_i(S_t).$$

- ▶ A seguir apresentamos um gráfico da probabilidade de nascimento versus $\mathbb{E}(\max(S_t))$, para por exemplo $\alpha = 0.3$.

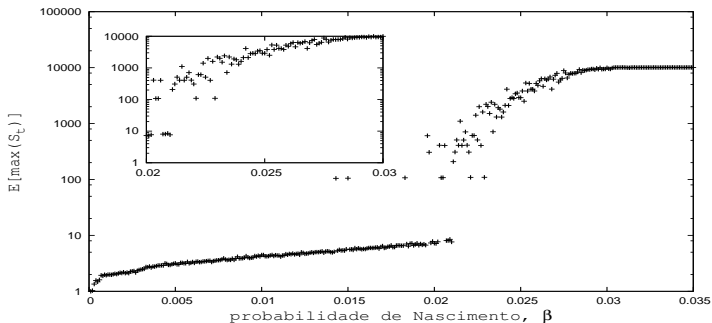


Figura: Comportamento da média de $\max(S_t)$, para $\alpha = 0,3$ e β variando de 0 até 0,04. Para cada par de α e β , foram realizados 100 experimentos independentes.

- ▶ A próxima figura ilustra os valores que S_t assume para $\alpha = 0,9$ e $\beta = 0,05$.
- ▶ Ela sugere que, para todo t , a “trajetória” de S_t fica intensamente concentrada nos valores $\{0, 1\}$ e muito suavemente concentrada no valor 2, sugerindo, inicialmente que, para esses valores de α e β , $\delta_{\ominus}(\text{VarStav})^t$ não tende para δ_{\oplus} , contrariando nosso teorema principal.

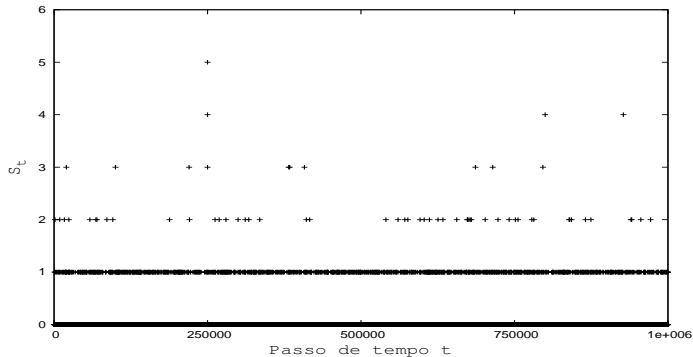


Figura: Gráfico que mostra, para $\alpha = 0,5$ e $\beta = 0,02$, os valores de S_t , na simulação do processo Singular.

Conclusões

- ▶ Introduzimos neste trabalho o processo de Stavskaya com comprimento variável (PSCV), inspirado no bem conhecido processo de Stavskaya clássico.
- ▶ Provamos um teorema que nos mostrou que $\delta_{\ominus}(\text{VarStav})^t$ tem comportamento ergódico, uma vez que, para todo $\alpha < 1$ e $\beta > 0$, este processo tende para δ_{\oplus} .
- ▶ Porém, tanto a aproximação do caos, quanto a simulação de Monte Carlo se mostraram, surpreendentemente, em outra direção com respeito ao nosso resultado teórico, pois estes métodos sugeriram a existência de uma linha de separação entre ergodicidade e não ergodicidade de nosso processo.

- ▶ Isto constitui um exemplo de um novo tipo: um processo de comprimento variável, para ilustrar um aparente conflito entre simulação computacional de processos aleatórios e seu estudo teórico.
- ▶ Notamos entretanto que, a simulação de Monte Carlo e a aproximação do caos, se comportam como se $\delta_{\ominus}(\text{VarStav})^t$ tendesse para δ_{\oplus} , de forma muito mais lenta para alguns valores de $\alpha, \beta \in (0, 1)$, do que para outros. Isto nos faz acreditar na seguinte conjectura: VarStav tem fase, porém, não no sentido simples como acontece no processo clássico de Stavskaya.