



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA COMPUTACIONAL  
TESE DE DOUTORADO

## Processos de Partículas sem Colisões

Calitéia Santana de Sousa

*Orientador: Prof. Dr. André Toom*

Recife-Pernambuco  
Novembro, 2007

# Processos de Partículas sem Colisões

Calitéia Santana de Sousa

Orientador: Prof. Dr. André Toom

Àrea de Concentração: Probabilidade

Tese de Doutorado apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática Computacional da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática Computacional.

Recife-Pernambuco

Novembro, 2007



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Doutorado em Matemática Computacional

**Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado**

**CALITÉIA SANTANA DE SOUSA**

**"PROCESSOS DE PARTÍCULAS SEM COLISÕES"**

A Banca Examinadora composta pelos Professores André Toom (Presidente), Klaus Leite Pinto Vasconcellos, ambos da Universidade Federal de Pernambuco, Borko Stosic, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, Fernando Antonio Figueiredo Cardoso da Silva, da Universidade Federal de Pernambuco, Fabio Prates Machado, da Universidade de São Paulo, IME-USP, considera a candidata:

( ) APROVADA COM DISTINÇÃO (X) APROVADA ( ) REPROVADA

Secretaria do Programa de Doutorado em Matemática Computacional do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, aos 28 dias do mês de novembro de 2007.

PROF. ANDRÉ TOOM  
PRESIDENTE

PROF. KLAUS LEITE PINTO VASCONCELLOS  
1º EXAMINADOR

PROF. BORKO STOSIC  
2º EXAMINADOR

PROF. FERNANDO ANTONIO FIGUEIREDO CARDOSO DA SILVA  
3º EXAMINADOR

PROF. FABIO PRATES MACHADO  
4ª EXAMINADOR

*A Deus e a minha família.*

*“Aqueles que saíram chorando, levando a semente para semear, voltarão cantando, cheios de alegria, trazendo nos braços os feixes da colheita.”*

***Salmos 126:6.***

# Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter me dado força e coragem para prosseguir.

Quero aqui expressar a minha imensa gratidão a todos que me apoiaram nesta caminhada e fizeram com que eu não desistisse e continuasse a jornada.

Agradeço em especial a minha família pelo seu apoio, compreensão, e por sempre estarem comigo em qualquer circunstância.

Um agradecimento de forma muito especial ao professor André Toom, por quem tenho grande respeito e admiração, por sua grande paciência e dedicação, não apenas como professor, mas também como um amigo, na difícil tarefa de orientar um trabalho acadêmico.

Ao amigo Alex Dias Ramos, por toda compreensão, paciência e apoio e, principalmente, pela imensa contribuição que teve no desenvolvimento deste trabalho, o qual atuou como se fosse um co-orientador.

À todos os meus amigos, pelos quais tenho enorme carinho, em especial aos amigos Azly S. A. Santana e Reinaldo de O. Lima, que sempre me apoiaram mesmo estando longe. E as minhas grandes amigas Jalila Rios dos Santos e Rita de Cássia Moura por todo seu apoio.

À todos os professores que fizeram parte da minha vida acadêmica e em especial, aos professores Inês Dias Malheiros da Universidade Salvador (UNIFACS), Enaldo

S. Vergasta e Vilton Jeovan Pinheiro da Universidade Federal da Bahia(UFBA).

Agradeço também aos professores do Programa de Doutorado em Matemática Computacional em especial, aos professores Alejandro C. Frery, César Castilho e Francisco Cribari Neto, por toda dedicação pelo programa e pelos alunos.

Gostaria de agradecer aos professores Borko Stosic, Fábio Prates Machado, Fernando Antônio Figueiredo Cardoso da Silva e Klaus Leite Pinto Vasconcellos, por suas importantes contribuições.

Gostaria também, de agradecer a todos os colegas e funcionários do Centro de Ciências Exatas e da Natureza, em especial a Valéria Costa Viviani Bittencourt por todo o seu empenho e disposição em nos ajudar sempre.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB) pelo apoio financeiro.

# Resumo

Consideramos uma classe de processos de partículas com tempo discreto com um número finito de tipos de partículas, a qual nós chamamos *Processos sem Colisões* (*Processes Without Collisions*) ou PWC para forma abreviada. Em cada passo de tempo, qualquer partícula pode morrer ou transformar-se em uma ou em várias partículas de qualquer tipo com certas probabilidades, mas não há colisões, ou seja, cada transformação é aplicada a somente uma partícula e a probabilidade dela não depende de outras partículas. Isto exclui as relações presa-predador e sexual, mas inclui morte e reprodução assexuada com possíveis mutações. Devido a esta restrição, as posições das partículas são irrelevantes e nós não as mencionaremos.

Nós provamos que se o número de partículas tende para o infinito, o comportamento do processo torna-se determinístico após normalização. De fato, esta aproximação é freqüentemente usada sem fundamentação adequada. Nós também provamos que o sistema dinâmico resultante tem um ponto fixo e que sob condições adicionais o ponto fixo é único e o sistema tende para ele a partir de qualquer condição inicial. Além disso, nosso estudo levanta algumas questões sobre a forma na qual alguns livros sobre dinâmica populacional têm sido escritos.



# Abstract

We consider a class of particle processes with discrete time and a finite number of types of particles, which we call *Processes Without Collisions* or PWC for short. At every time step, any particle may die or transform itself into one or several particles of any types with certain probabilities, but there are no collisions, that is, every transformation applies to only one particle and its probability does not depend on the other particles. This excludes predator-prey and sexual relations, but includes death and asexual reproduction with possible mutations. Due to this restriction, positions of particles are irrelevant and we do not mention them.

We prove that if the number of particles tends to infinity, the behavior of the process becomes deterministic after normalization. In fact, this approximation is often used without a proper foundation. We also prove that the resulting dynamic system has a fixed point and that under additional conditions the fixed point is unique and the system tends to it from any initial condition. Besides, this approach raises some questions about the manner in which some books on populational dynamics are written.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>Principais Termos e Notações</b>	<b>1</b>
<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>1 Sistema</b>	<b>9</b>
1.1 Definições e Descrição do Processo . . . . .	9
1.2 O Operador Probabilístico . . . . .	11
1.3 O Operador Determinístico . . . . .	17
<b>2 Propriedades do Conjunto <math>D</math></b>	<b>24</b>
<b>3 Limite do Processo Estocástico</b>	<b>28</b>

3.1	Enunciado e Prova do Análogo da Lei dos Grandes Números para o Nosso Sistema. . . . .	28
3.2	Enunciado e Demonstração do Teorema Sobre o Limite do Processo Estocástico . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Existência e Unicidade do Ponto Fixo</b>	<b>43</b>
4.1	Enunciado e Prova da Existência do Ponto Fixo . . . . .	43
4.2	Enunciado e Prova da Unicidade do Ponto Fixo . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Exemplos</b>	<b>85</b>
<b>6</b>	<b>Aplicação: Sistemas com Comprimento Variável</b>	<b>94</b>
6.1	Sistemas com Comprimento Variável . . . . .	94
6.2	Estudo de Processos com Comprimento Variável Usando Processos PWC . . . . .	104
<b>7</b>	<b>Conclusões e Perspectivas Futuras</b>	<b>115</b>
	<b>Apêndice - Esquema das Demonstrações</b>	<b>119</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>123</b>

# Lista de Figuras

- 3.1 *Ilustração do lema 14 no caso em que temos apenas dois tipos de partículas, ou seja,  $n = 2$ . Temos os pontos  $A$  e  $B$  em  $\Omega$  e os pontos  $A'$  e  $B'$  pertencentes ao conjunto  $D$ . A forma quadrada da vizinhança do ponto  $A$  é determinada por nossa definição da norma (1.3) na página 10. . . . . 38*
- 6.1 *Superfície de separação entre as regiões nas quais o operador  $Q$  definido em (6.6) tem comportamento ergódico vs. não ergódico. . 102*
- 6.2 *Curvas  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ , apresentadas na figura 6.1 . . . . . 103*
- 7.1 *Esquema das demonstrações dos resultados contidos no capítulo 1. O número 1 disposto dentro de uma figura oval, representa a respectiva conexão com o esquema apresentado na figura 7.2. . . . 119*
- 7.2 *Esquema das demonstrações dos resultados contidos nos capítulos 2 e 3 e na primeira parte do capítulo 4. O número 1 disposto dentro de uma figura oval, representa a respectiva conexão com o esquema apresentado na figura 7.1. . . . . 120*

7.3	<i>Esquema das demonstrações dos resultados contidos na segunda parte do capítulo 4. Os números 2, 3, 4, 5, 6 e 7, dispostos dentro de figuras ovais, representam as respectivas conexões com o esquema apresentado na figura 7.4. . . . . .</i>	121
7.4	<i>Continuação do esquema das demonstrações dos resultados contidos na segunda parte do capítulo 4, incluindo o nosso Teorema Principal (T 5). Os números 2, 3, 4, 5, 6 e 7, dispostos dentro de figuras ovais, representam as respectivas conexões com o esquema apresentado na figura 7.3. . . . . .</i>	122

# Lista de Tabelas

4.1	Ilustração da indução para demonstrar o lema 20 . . . . .	60
4.2	Possíveis valores de $b_{i,k}^t$ e $b_{k,i}^1$ para o caso 1 em todo intervalo $1 \leq k \leq n$ . . . . .	61
4.3	Possíveis valores de $b_{i,k}^t$ e $b_{k,j}^1$ para o caso 2 em todo intervalo $1 \leq k \leq n$ . . . . .	62
4.4	Possíveis valores de $b_{i,k}^t$ e $b_{k,j}^1$ para o caso 3 em todo intervalo $1 \leq k \leq n$ . . . . .	63
4.5	Possíveis valores de $b_{i,k}^t$ e $b_{k,j}^1$ para o caso 4 em todo intervalo $1 \leq k \leq n$ . . . . .	64
6.1	Comparação entre os resultados obtidos com o processo estocástico (6.5) e o processo determinístico (6.13). . . . .	112

# Principais Termos e Notações

Os maiores resultados do nosso trabalho são chamados de **Teoremas**. Os menores resultados, usados para provar os teoremas, são chamados de **Lemas**. **Teoremas Auxiliares** são afirmações usadas por nós, mas não provadas nesta Tese pois suas provas são conhecidas na literatura. Nos esquemas 7.1, 7.2, 7.3 e 7.4, **T** significa Teorema, **TA** significa Teorema Auxiliar e **L**, Lema.

PWC - Processos sem Colisões (Processes Without Collisions).

$\mathbb{Z}$  - Conjunto dos números inteiros.

$\mathbb{Z}_+$  - Conjunto dos números inteiros não-negativos.

$\mathbb{R}$  - Conjunto dos números reais.

$\mathbb{R}_+$  - Conjunto dos números reais não-negativos.

$\mathbb{C}$  - Conjunto dos números complexos.

$\mathbb{Z}^n$  - Conjunto dos vetores  $n$ -dimensionais inteiros.

$\mathbb{R}^n$  - Conjunto dos vetores  $n$ -dimensionais reais.

$O$  - Origem de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{Z}^n$ .

$\Omega = \mathbb{Z}_+^n$  - Conjunto dos vetores  $n$ -dimensionais inteiros não-negativos, definido

na página 9.

$\delta_k$  - vetor em  $\Omega$  contendo um na  $k$ -ésima posição e zeros em todas as outras posições.

$\delta_0$  - vetor em  $\Omega$  contendo zeros em todas as posições.

$q$  - Vetor em  $\Omega$ .

$q_k$  -  $k$ -ésima coordenada do vetor  $q$ .

$P$  - Distribuição de probabilidade em  $\Omega$ .

$P_q$  - Valor da distribuição  $P$  no vetor  $q$ .

$\Pi$  - Conjunto de distribuições de probabilidade em  $\Omega$ .

$\Pi'$  - Conjunto de distribuições de probabilidade em  $\Omega$  que são de fato finitas.

$\mathbb{R}_+^n$  - Conjunto dos vetores  $n$ -dimensionais reais não-negativos.

$\mathbb{C}^n$  - Conjunto dos vetores  $n$ -dimensionais complexos.

$k$ -partículas - Partículas do tipo  $k$ .

$\|c\| = \sum_{i=1}^n |c_i|$  - Norma do vetor  $c \in \mathbb{C}^n$ , definida na página 10.

$\text{dist}(v, v') = \|v - v'\|$  - Distância entre os vetores  $v$  e  $v'$  em  $\mathbb{R}^n$ , definida na página 10.

$D \subset \mathbb{R}^n$  - Conjunto de vetores positivos e normalizados, definido na página 11.

$D^+$  - Conjunto de vetores pertencentes ao conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  de coordenadas



positivas definido na página 11.

$Norm$  - Operador de normalização, definido na página 11.

$round(x)$  - Operador de arredondamento de  $x \in \mathbb{R}$ , ou seja, o menor número inteiro o qual não é menor do que  $x$ .

$round(v)$  - Vetor cujas componentes são arredondamentos das componentes de  $v$ .

$Prob(A)$  - Probabilidade do evento  $A$  ocorrer.

$E(X)$  - Esperança da variável aleatória  $X$ .

$\theta_{k,q}$  - Probabilidade da  $k$ -partícula tornar-se em um vetor  $q$ , veja página 13.

$C$  - Valor limite do número de partículas em que cada partícula pode transformar-se de uma vez, veja página 13.

$\Delta_q$  - Distribuição concentrada no vetor  $q \in \Omega$ .

$M\Delta_q$  - Resultado da aplicação de  $M$  para  $\Delta_q$ .

$M : \Pi \rightarrow \Pi$  - Operador Probabilístico, definido na página 14.

$d_k$  - Densidade de  $k$ -partículas no modelo contínuo, veja página 17.

$M_0$  - Operador agindo em  $\mathbb{R}^n$  e a matriz representante deste operador.

$\tilde{M}$  - Operador determinístico, definido na página 18.

$I$  - Matriz identidade de ordem  $n$ .

$det(M)$  - Determinante da matriz  $M$ .

$M - \lambda I$  - Matriz característica de  $M$ .

$\det(M - \lambda I)$  - Polinômio característico de  $M$ .

$m(\lambda)$  - Polinômio Mínimo de  $M$ .

$\lambda_{dom}$  - Autovalor dominante da matriz  $M_0$ .

$d_{dom}$  - Autovetor dominante da matriz  $M_0$ , o qual pertence ao conjunto  $D$ .

$J$  - Matriz na forma canônica de Jordan definida na página 52.

$v||w$  - Os vetores  $v$  e  $w$  são colineares.

$f^t$  -  $t$ -ésima iterada da aplicação  $f$ .

o - Operação de composição.

$C_n^p$  - Número de combinações simples de  $p$  objetos entre  $n$  objetos.

# Introdução

A teoria de processos estocásticos é uma área da matemática moderna que possui muitas aplicações. Dentre elas o estudo de processos físicos e biológicos. Um dos principais problemas em sistemas deste tipo é determinar seu comportamento em um longo período de tempo. O estudo de estabilidade de modelos estocásticos é um assunto que tem despertado interesse, especialmente no caso de sistemas biológicos; um exemplo pode ser observado em [29]. Nesta conexão é importante estudar processos ergódicos vs. não-ergódicos, os quais tendem vs. não tendem para um limite único quando o tempo tende para o infinito.

Atualmente existem vários trabalhos na literatura os quais estudam processos estocásticos considerando sistemas de partículas com ou sem interação em tempo discreto ou contínuo. Em [4], por exemplo, é feito um estudo do comportamento assintótico de algoritmos genéticos usando sistemas de partículas interagentes. Um trabalho que contribuiu muito para a teoria de sistemas de partículas com tempo contínuo foi [13]. No nosso estudo consideramos apenas tempo discreto, mas esperamos que seja possível aplicar métodos aqui desenvolvidos para o caso do tempo contínuo. Para sistemas interagentes com tempo discreto podemos observar exemplos em [32] e [34].

Na comunidade científica existe o sentimento de que todos os sistemas sem interação são ergódicos. No nosso trabalho queremos formalizar e desenvolver mate-

maticamente este sentimento.

Consideramos uma classe de processos aleatórios com tempo discreto, na qual existem  $n$  tipos de partículas. Qualquer partícula pode morrer ou transformar-se em uma ou em várias partículas de qualquer tipo com certas probabilidades. Nossa principal hipótese é que não há colisões ou interações, ou seja, cada transformação é aplicada a somente uma partícula e a probabilidade dela não depende de outras partículas. Devido a esta restrição, as posições das partículas são irrelevantes e nós não as mencionaremos. Nós chamamos tais processos de Processos sem Colisões ou PWC (*Processes Without Collisions*) para abreviar. Nós estudamos PWC com o primeiro objetivo de provar que eles são ergódicos sob condições razoáveis.

A ausência de colisões implica ausência de qualquer analogia com as relações presa-predador ou sexual. Entretanto, nossos métodos podem ser aplicados para problemas de sobrevivência, proliferação, mutação e evolução de espécies com reprodução assexuada, por exemplo, vírus. Nossos processos também podem ser úteis para modelos dinâmicos sociais, os quais incluem crescimento e mobilidade social.

Nós direcionamos uma atenção especial para o limite quando o número de partículas tende para o infinito e as quantidades de partículas de todos os tipos podem ser tratadas como números reais. Nós provamos que, sob moderadas condições, o sistema dinâmico resultante tem no mínimo um ponto fixo e sob condições adicionais tem exatamente um ponto fixo e tende para ele quando o tempo tende para o infinito.

Provamos também que se o número de partículas tende para o infinito, o comportamento do processo torna-se determinístico após normalização. Assim, usamos o processo determinístico como uma aproximação do nosso processo estocástico

original normalizado, quando o número de partículas é grande. Na verdade, a aproximação de sistemas estocásticos por sistemas determinísticos é frequentemente usada em várias ciências, no entanto, alguns estudos mostram que esta aproximação nem sempre é aceitável.

Por exemplo, em [31] é apresentado um estudo sobre populações de vírus no qual os autores observaram que para infecções iniciadas com um único indivíduo os resultados das simulações computacionais do processo estocástico diferem significativamente dos resultados obtidos das simulações computacionais da aproximação determinística.

Lamentavelmente, alguns livros sobre dinâmica populacional supõem a possibilidade de aproximação e correspondência entre modelos estocásticos e determinísticos, sem, no entanto, justificar por que essa aproximação pode ser feita e sob que condições.

Em [2], [3] e [27], são apresentados vários exemplos de processos estocásticos e suas respectivas aproximações determinísticas. Nestas referências, é mencionado que às vezes o tamanho da população não é suficiente para validar o uso de um método determinístico, porém não é apresentado nenhum critério para decidir se a aproximação determinística é aceitável.

Esta Tese possui a seguinte organização: no capítulo 1, apresentamos as principais definições e a descrição do nosso processo, bem como os nossos principais operadores. No capítulo 2, provamos as propriedades do conjunto de vetores positivos e normalizados. No capítulo 3, provamos que o nosso processo estocástico após normalização possui uma aproximação determinística. No capítulo 4, enunciamos e provamos o nosso principal resultado, que o sistema dinâmico resultante tem um único ponto fixo e tende para ele quando o tempo tende para o infinito. O capítulo

5, apresenta alguns exemplos utilizando os nossos resultados teóricos. No capítulo 6, mostramos exemplo de processos que podemos estudar usando os nossos processos PWC. O trabalho é finalizado no capítulo 7, com as conclusões e algumas perspectivas futuras.

# Capítulo 1

## Sistema

### 1.1 Definições e Descrição do Processo

Denotamos por  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais, por  $\mathbb{R}_+$  o conjunto dos números reais não-negativos, por  $\mathbb{Z}$  o conjunto dos números inteiros, por  $\mathbb{Z}_+$  o conjunto dos números inteiros não-negativos e por  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos.

Denotamos

$$\Omega = \mathbb{Z}_+^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} : z_1 \in \mathbb{Z}_+, \dots, z_n \in \mathbb{Z}_+ \right\}. \quad (1.1)$$

Partículas do tipo  $k = 1, \dots, n$  serão chamadas  **$k$ -partículas**. Um estado genérico do nosso processo é um vetor

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \in \Omega,$$

onde  $q_k \in \mathbb{Z}_+$  denota o número de  $k$ -partículas.

Denotamos  $O$  a origem de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{Z}^n$ .

Denotamos  $\mathbb{R}_+^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} : v_1 \in \mathbb{R}_+, \dots, v_n \in \mathbb{R}_+ \right\}$ .

Denotamos

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} ; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C} \right\}. \quad (1.2)$$

Para qualquer vetor  $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$  denotamos

$$\|c\| = \sum_{i=1}^n |c_i| \quad (1.3)$$

e chamamos  $\|c\|$  a **norma** de  $c$ .

Desta forma, introduzimos a seguinte distância em  $\mathbb{R}^n$ :

$$\forall v, v' \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(v, v') = \|v - v'\|. \quad (1.4)$$

Nós chamamos um vetor  $n$ -dimensional  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  **positivo** se

$$v_1 \geq 0, \dots, v_n \geq 0 \quad \text{e} \quad v_1 + \dots + v_n > 0. \quad (1.5)$$

Desta forma, para qualquer vetor positivo  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  temos

$$\|v\| = v_1 + \dots + v_n.$$

Para qualquer vetor  $v \in \mathbb{R}^n$  chamamos  $v$  de **normalizado** se  $\|v\| = 1$ .



Nós denotamos por  $D$  o conjunto de vetores positivos e normalizados, ou seja,

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} : v_1 \geq 0, \dots, v_n \geq 0, v_1 + \dots + v_n = 1 \right\}. \quad (1.6)$$

Nós denotamos por  $D^+$  o conjunto dos vetores pertencentes a  $D$  de coordenadas positivas, ou seja,

$$D^+ = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} : v_1 > 0, \dots, v_n > 0, v_1 + \dots + v_n = 1 \right\}. \quad (1.7)$$

Nós denotamos por  $Norm$  o **operador de normalização**, isto é,

$$Norm(v) = v/\|v\| \quad (1.8)$$

para qualquer vetor  $v$  tal que  $\|v\| \neq 0$ .

## 1.2 O Operador Probabilístico

Denotamos por  $\Pi$  o conjunto de distribuições de probabilidade em  $\Omega$ , onde  $\Omega$  foi definido em (1.1).

**Definição 1.** *Sejam uma distribuição  $P \in \Pi$  e  $P_q$  o valor da distribuição de probabilidade  $P$  no vetor  $q$ . Dizemos que a distribuição  $P$  é **de fato finita**, se o conjunto  $\{q \in \Omega : P_q > 0\}$  é finito.*

Denotamos por  $\Pi'$  o conjunto de distribuições de probabilidade em  $\Omega$  que são de fato finitas.

**Definição 2.** Sejam  $a, b$  elementos de um espaço linear  $\mathcal{U}$ . O segmento de reta de extremos  $a, b$  é o conjunto

$$[a, b] = \{(1 - t) \cdot a + t \cdot b; 0 \leq t \leq 1\}.$$

Dizemos que qualquer  $S \subset \mathcal{U}$  é **convexo** quando

$$a, b \in S \implies [a, b] \subset S.$$

**Lema 1.**  $\Pi$  e  $\Pi'$  são convexos.

**Demonstração do Lema 1.** A convexidade de  $\Pi$  é evidente. Vamos demonstrar agora a convexidade de  $\Pi'$ .

Queremos mostrar que  $\forall P, Q \in \Pi', [P, Q] = \{(1 - t)P + tQ; 0 \leq t \leq 1\} \subset \Pi'$ .

Como  $\Pi$  é convexo  $[P, Q] \subset \Pi$ .

Vamos mostrar agora que para todo  $0 \leq t \leq 1$ ,  $(1 - t)P + tQ$  é de fato finita, ou seja, o conjunto  $\{q \in \Omega : ((1 - t)P + tQ)_q > 0\}$  é finito.

Temos que  $((1 - t)P + tQ)_q = (1 - t)P_q + tQ_q, \forall q \in \Omega$ . Assim, como  $P$  e  $Q$  são de fato finitas, os conjuntos  $\{q \in \Omega : P_q > 0\}$  e  $\{q \in \Omega : Q_q > 0\}$  são finitos.

Como

$$\{q \in \Omega : ((1 - t)P + tQ)_q > 0\} \subset \{q \in \Omega : P_q > 0\} \cup \{q \in \Omega : Q_q > 0\},$$

logo o conjunto  $\{q \in \Omega : ((1 - t)P + tQ)_q > 0\}$  é finito.

Logo,  $[P, Q] \subset \Pi'$ . Portanto, o lema 1 está demonstrado.

Denotamos por  $\delta_k \in \Omega$  o vetor contendo um na  $k$ -ésima posição e zeros em todas as outras posições e por  $\delta_0 \in \Omega$  o vetor contendo zeros em todas as posições.

A cada passo do tempo discreto todas as partículas decidem independentemente em quê elas irão se tornar. Cada  $k$ -partícula torna-se um vetor

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad \text{com uma probabilidade } \theta_{k,q}. \quad (1.9)$$

Isto inclui morte se  $q = \delta_0$  e permanecer não modificada se  $q = \delta_k$ . Como sempre na teoria de probabilidade,

$$\forall k : \sum_{q \in \Omega} \theta_{k,q} = 1. \quad (1.10)$$

Em todo o trabalho assumimos que existe uma constante  $C$  tal que

$$q_1 + \cdots + q_n > C \implies \theta_{k,q} = 0, \quad (1.11)$$

ou seja, nenhuma partícula pode transformar-se em mais do que  $C$  partículas de uma vez.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Neste estudo, supomos que cada partícula morre com probabilidade} \\ \text{menor do que } 1, \text{ isto é, para todo } k = 1, \dots, n, \theta_{k,\delta_0} < 1. \end{array} \right\} \quad (1.12)$$

Agora, definimos um operador  $M : \Pi' \rightarrow \Pi'$  em dois passos.

Primeiro, para cada  $q \in \Omega$ , denotamos por  $\Delta_q$  a distribuição concentrada no vetor  $q \in \Omega$ , ou seja, ela assume valor um no vetor  $q$  e zero em todos os outros. Definimos  $M\Delta_q$ , o resultado da aplicação de  $M$  em  $\Delta_q$ , para qualquer  $q$ , como a seguinte soma de distribuições em  $\Omega$ , isto é, vetores aleatórios  $V_k^j$  :

$$M\Delta_q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{q_k} V_k^j, \quad (1.13)$$

onde cada  $V_k^j$  é igual a qualquer  $p$  com probabilidade  $\theta_{k,p}$  para todo  $p \in \Omega$ . Aqui  $q_k$  é a  $k$ -ésima componente de  $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ . Para formalizar a nossa hipótese de ausência de colisões ou interações assumimos que os vetores aleatórios  $V_k^j$  são conjuntamente independentes. Então nós definimos como  $M$  atua em  $\Delta_q$ .

Agora, definimos como  $M$  atua em qualquer distribuição de probabilidade  $P \in \Pi'$ , assim:

$$MP = \sum_{q \in \Omega} (M\Delta_q) \cdot P_q, \quad (1.14)$$

onde  $P_q$  é o valor da distribuição de probabilidade  $P$  no vetor  $q$ .

**Definição 3.** Para todo  $i = 1, \dots, n$ , sejam  $a_i \in \mathbb{R}^\infty$ , onde  $\mathbb{R}^\infty$  é o conjunto de seqüências infinitas de números reais. Chamamos **combinação convexa** a soma  $\sum_{i=1}^n t_i \cdot a_i$ , onde  $0 \leq t_i \leq 1$  e  $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ .

**Lema 2.** Sejam o operador  $M : \Pi' \rightarrow \Pi'$  definido em (1.14) e uma distribuição de probabilidade  $P \in \Pi'$ . Então  $MP \in \Pi'$ . Ou seja,  $M$  está bem definido.

**Demonstração do Lema 2.** Por (1.13) e pela condição (1.11), para todo  $q \in \Omega$ , temos que a soma

$$M\Delta_q = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{q_k} V_k^j \quad \text{é de fato finita.}$$

Assim, para todo  $q \in \Omega$

$$(M\Delta_q) \cdot P_q \quad \text{é de fato finita.}$$

Pelo lema 1, como  $\Pi'$  é convexo,

$$\{(M\Delta_q) \cdot P_q; 0 \leq P_q \leq 1\} \subset \Pi'.$$

Como  $M$  atua em todo  $\Pi'$

$$\sum_{q \in \Omega} (M\Delta_q) \cdot P_q$$

é uma combinação convexa de distribuições em  $\Pi'$ , assim

$$\sum_{q \in \Omega} (M\Delta_q) \cdot P_q \in \Pi'.$$

Portanto, o lema 2 está demonstrado.

**Definição 4.** *Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais sobre um mesmo corpo  $\mathbb{K}$  e uma aplicação  $T : V \rightarrow W$ . Chamamos  $T$  uma **aplicação linear** se, para todo  $v, w \in V$  e para todo  $a \in \mathbb{K}$ ,*

$$\begin{cases} Tav = aTv, \\ T(v + w) = Tv + Tw \end{cases}$$

*Chamamos uma aplicação linear  $T : V \rightarrow V$  de **operador linear**.*

Usando a definição 4, vamos definir agora um operador linear no conjunto de distribuições de probabilidade  $\Pi$ .

**Definição 5.** *Seja  $M : \Pi \rightarrow \Pi$  um operador no conjunto de distribuições de probabilidade  $\Pi$ . Sejam  $0 \leq a \leq 1$  e  $P, Q \in \Pi$ . Dizemos que  $M$  é **linear** se*

$$M(aP + (1 - a)Q) = aMP + (1 - a)MQ.$$

**Lema 3.** *O nosso operador  $M : \Pi' \rightarrow \Pi'$  definido em (1.14) é linear.*

**Demonstração do Lema 3.**

Sejam  $0 \leq a \leq 1$  e  $P, Q \in \Pi'$ . Pelo lema 1,  $(aP + (1 - a)Q) \in \Pi'$ . Logo, usando a definição (1.14),

$$\begin{aligned}
M(aP + (1 - a)Q) &= \sum_{q \in \Omega} (M\Delta_q) \cdot (aP + (1 - a)Q)_q = \\
&= \sum_{q \in \Omega} (M\Delta_q) \cdot (aP_q + (1 - a)Q_q) = \\
&= \sum_{q \in \Omega} [a(M\Delta_q)P_q + (1 - a)(M\Delta_q)Q_q] = \\
&= a \sum_{q \in \Omega} (M\Delta_q)P_q + (1 - a) \sum_{q \in \Omega} (M\Delta_q)Q_q = \\
&= aMP + (1 - a)MQ,
\end{aligned}$$

onde  $(aP + (1 - a)Q)_q$  é o valor da distribuição de probabilidade  $(aP + (1 - a)Q)$  no vetor  $q$ . Assim, o lema 3 está demonstrado.

**Definição 6.** Consideremos um operador  $M : \Pi \rightarrow \Pi$ . Chamamos de **processo** a seqüência de distribuições  $P, MP, M^2P, \dots$ , sendo  $M^tP$  o resultado da  $t$ -ésima ação iterativa do operador  $M$  em uma distribuição inicial  $P \in \Pi$ .

**Definição 7.** Sejam  $X, X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade. Dizemos que  $X_n$  converge para  $X$  **quase certamente** se  $\text{Prob}(X_n \rightarrow X \text{ quando } n \rightarrow \infty) = 1$ , ou seja, se o evento  $\{w : X_n(w) \rightarrow X(w)\}$  é de probabilidade 1.

**Definição 8.** Chamamos um operador estocástico  $M : \Pi' \rightarrow \Pi'$  **ergódico** se o limite quase certo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M^t P$$

existe e é o mesmo para todo  $P \in \Pi'$ , ou seja, se existe uma distribuição  $Q \in \Pi'$  tal que

$$\forall P \in \Pi' : \text{Prob}(M^t P \rightarrow Q \text{ quando } t \rightarrow \infty) = 1.$$

### 1.3 O Operador Determinístico

Na prática lidamos freqüentemente com macro-quantidades, isto é, quantidades grandes de partículas, tão grandes que usamos macro-medidas contínuas no lugar de micro-medidas discretas. Por exemplo, falando de uma reação química ou nuclear, mensuramos as quantidades de substâncias em macro-medidas, tais como gramas ou kilogramas, no lugar de micro-medidas como o número de moléculas ou átomos. Temos o hábito de tratar macro-quantidades como contínuas apesar da micro-natureza discreta dessas substâncias.

Queremos deduzir as regras de transformação de macro-medidas a partir do comportamento de micro-medidas definido acima.

Nesta conexão, consideremos o análogo não-inteiro do nosso operador, no qual em vez de números inteiros não-negativos de partículas de cada tipo, nós temos números reais não-negativos - **densidades**  $d_1, \dots, d_n$  de cada tipo. (1.15)

Denotamos

$$M_0 = \begin{pmatrix} \sum_{r \in \Omega} r_1 \theta_{1,r} & \cdots & \sum_{r \in \Omega} r_1 \theta_{n,r} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{r \in \Omega} r_n \theta_{1,r} & \cdots & \sum_{r \in \Omega} r_n \theta_{n,r} \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

onde  $\Omega$  foi definido em (1.1) na página 9. Para todo  $i = 1, \dots, n$ ,  $r_i$  é a  $i$ -ésima coordenada do vetor  $r$  e  $\theta_{i,r}$  são definidos em (1.9) na página 13.

Como nosso interesse está na quantidade de partículas, nos concentramos em vetores no  $\mathbb{R}^n$ . No entanto, nas demonstrações dos nossos resultados, aplicamos o operador  $M_0$  definido em (1.16) para vetores complexos também.

Definimos também o operador de normalização o qual age em qualquer distribuição probabilística  $P$  em  $\Omega$  (definido em (1.1)) assim:  $\left. \begin{array}{l} \text{Definimos também o operador de normalização o qual age em qual-} \\ \text{quer distribuição probabilística } P \text{ em } \Omega \text{ (definido em (1.1)) assim:} \\ \text{Norm}(P) \text{ é uma distribuição em } D \text{ induzida por } P \text{ com a apli-} \\ \text{cação } Norm \text{ definida na fórmula (1.8).} \end{array} \right\} \quad (1.17)$

**Definição 9.** *Sejam o operador  $Norm$  definido em (1.8) na página 11, e a matriz  $M_0$  definida em (1.16). Seja o conjunto  $D$  definido em (1.6) na página 11. Para todo  $d \in D$ , definimos o operador determinístico  $\tilde{M} : D \rightarrow D$  por*

$$\tilde{M}d = Norm(M_0d). \quad (1.18)$$

**Lema 4.** *Sejam o operador  $Norm$  definido em (1.8) na página 11 e um vetor  $n$ -dimensional  $v \in \mathbb{R}^n$ , positivo. Então  $Norm(v) \in D$ .*

**Demonstração do Lema 4.** Denotamos  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ . Como  $v$  é positivo, temos por (1.5) para todo  $i = 1, \dots, n$

$$\frac{v_i}{\|v\|} = \frac{v_i}{\sum_{j=1}^n v_j} \geq 0.$$



Temos,

$$\text{Norm}(v) = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{\sum_{i=1}^n v_i} \\ \vdots \\ \frac{v_n}{\sum_{i=1}^n v_i} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\frac{\frac{v_1}{\sum_{i=1}^n v_i} + \dots + \frac{v_n}{\sum_{i=1}^n v_i}}{\sum_{i=1}^n v_i} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{\sum_{i=1}^n v_i} = 1.$$

Portanto, o lema 4 está demonstrado.

**Lema 5.** *Seja a matriz  $M_0$  definida em (1.16) na página 17. Todos os elementos da matriz  $M_0$  são não-negativos. Nenhuma coluna da matriz  $M_0$  é nula.*

**Demonstração do Lema 5.** Seja, para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $(M_0)_{i,j}$  o elemento na linha  $i$  e na coluna  $j$  da matriz  $M_0$ .

Assim, para todo  $i, j = 1, \dots, n$  podemos escrever

$$(M_0)_{i,j} = \sum_{r \in \Omega} r_i \theta_{j,r}.$$

Logo, para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,

$$(M_0)_{i,j} \geq 0.$$

Para todo  $j = 1, \dots, n$ , somando os elementos da coluna  $j$  obtemos

$$\sum_{i=1}^n (M_0)_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{r \in \Omega} r_i \theta_{j,r}.$$

É suficiente provar que para todo  $j = 1, \dots, n$ ,  $\sum_{i=1}^n (M_0)_{i,j} > 0$ .

Para todo  $j = 1, \dots, n$ , transformamos esta soma assim:

$$\sum_{i=1}^n (M_0)_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{r \in \Omega} r_i \theta_{j,r} = \sum_{r \in \Omega} \sum_{i=1}^n r_i \theta_{j,r} = \sum_{r \in \Omega} \theta_{j,r} \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{r \in \Omega} \theta_{j,r} \|r\|.$$

Pela definição de norma, apresentada na página 10,

$$\|r\| = 0 \iff r = \delta_0.$$

Pela mesma razão  $\|r\| \geq 1$  para todo  $r \in \Omega \setminus \{\delta_0\}$ .

Por (1.12), para todo  $j = 1, \dots, n$ , a probabilidade de cada  $j$ -partícula morrer é menor do que 1, isto é,  $\theta_{j,\delta_0} < 1$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Assim, para todo  $j = 1, \dots, n$ , existe  $r \in \Omega$  com  $\|r\| \geq 1$ , tal que a probabilidade de transformação  $\theta_{j,r}$  é positiva.

Portanto, por (1.10),

$$\sum_{r \in \Omega} \|r\| \theta_{j,r} > 0.$$

Assim, o lema 5 está demonstrado.

**Lema 6.** *Sejam  $\tilde{M}$  a matriz definida em (1.18) e  $D$  o conjunto definido em (1.6) na página 11. Então para todo  $d \in D$ ,  $\tilde{M}d \in D$ .*

**Demonstração do Lema 6.** Temos para todo  $i = 1, \dots, n$ :

$$(M_0 d)_i = \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r_i \theta_{k,r}.$$

Logo, para todo  $i = 1, \dots, n$ ,

$$(M_0 d)_i \geq 0.$$

É suficiente provar que  $\sum_{i=1}^n (M_0 d)_i > 0$ .

Transformamos esta soma assim:

$$\sum_{i=1}^n (M_0 d)_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r_i \theta_{k,r} = \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} \|r\| \theta_{k,r}.$$

Supomos para contradição que

$$\sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} \|r\| \theta_{k,r} = 0. \quad (1.19)$$

Assim, como todos os termos são não negativos, temos

$$d_k \sum_{r \in \Omega} \|r\| \theta_{k,r} = 0, \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n.$$

Logo

$$d_k = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{r \in \Omega} \|r\| \theta_{k,r} = 0, \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n.$$

Pelo lema 5 temos que

$$\sum_{r \in \Omega} \|r\| \theta_{k,r} > 0.$$

Assim

$$d_k = 0, \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n, \quad \text{isto é } d = \delta_0.$$

Como  $\delta_0 \notin D$ , obtemos uma contradição. Logo a hipótese (1.19) é falsa. Portanto

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r_i \theta_{k,r} > 0.$$

Assim provamos que o vetor  $M_0d$  é positivo. Desta forma, pelo lema 4,

$$\tilde{M}d = \text{Norm}(M_0d) \in D.$$

Portanto, o lema 6 está demonstrado.

Neste trabalho temos interesse apenas em proporções de substâncias. Por esta razão assumimos que o vetor de densidades é sempre normalizado, isto é

$$d_1 + \dots + d_n = 1,$$

ou seja,

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in D$$

onde  $D$  foi definido em (1.6). Nós mostraremos como obter o comportamento de densidades como um limite do processo original quando o número de partículas tende para o infinito.

Agora vamos esclarecer como este operador determinístico  $\tilde{M}$ , definido em (1.18), está relacionado com o operador aleatório  $M$ , definido em (1.14).

Para qualquer número  $x \geq 0$  nós denotamos  $\text{round}(x)$  o menor número inteiro que não é menor do que  $x$  e chamamos este operador de **arredondamento**. Para qualquer vetor positivo  $v$  nós denotamos por  $\text{round}(v)$  o vetor cujas componentes são arredondamentos das componentes de  $v$ :

$$\text{round}(v) = \begin{pmatrix} \text{round}(v_1) \\ \vdots \\ \text{round}(v_n) \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Começamos com um macro-estado  $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in D$ . Primeiro o transformamos em micro-estado como segue: escolhemos um número  $L$  grande, multiplicamos

todas as componentes de  $d$  por  $L$  e tomamos aproximações inteiras delas. Então obtemos o vetor  $\text{round}(L \cdot d)$ , onde a operação  $\text{round}$  é definida em (1.20). Depois aplicamos um passo do nosso processo aleatório, obtemos então o vetor aleatório  $M\Delta_{\text{round}(L \cdot d)}$ , onde  $M$  foi definido em (1.14).

Depois voltamos para  $D$  aplicando o operador  $Norm$ . Logo obtemos um vetor aleatório

$$Norm\left(M\Delta_{\text{round}(L \cdot d)}\right), \quad (1.21)$$

distribuído em  $D$ . Para ficar mais perto da prática, é melhor tomar  $L$  finito, mas agora vamos supor que  $L \rightarrow \infty$ .

Na seção 3.2 vamos mostrar que a distribuição (1.21) concentra-se em  $\tilde{M}d$ , quando  $L \rightarrow \infty$ , ou seja,  $\forall d \in D$  e  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$Prob\left(\text{dist}\left(Norm\left(M\Delta_{\text{round}(L \cdot d)}\right), \tilde{M}d\right) > \varepsilon\right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

Então se o número de partículas tende para o infinito, após normalização o comportamento do processo torna-se determinístico com fórmula explícita (1.18). Usaremos isso para empregar o processo determinístico como uma aproximação do nosso processo estocástico original, quando o número de partículas é grande.

**Definição 10.** Um operador  $K : D \rightarrow D$  é chamado **ergódico** se o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K^t d$$

existe e é o mesmo para todo  $d \in D$ .

Nesta Tese vamos provar que o operador determinístico  $\tilde{M}$  tem comportamento semelhante ao de um operador ergódico, conforme definição 10, isto é, mostraremos que o limite existe para todos os pontos  $d \in D^+$ .

## Capítulo 2

### Propriedades do Conjunto $D$

Neste capítulo vamos demonstrar algumas propriedades importantes do conjunto  $D$ , definido em (1.6) na página 11. Lembramos que, para qualquer vetor  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|v\|$  foi definido em (1.3) na página 10.

**Definição 11.** *Seja  $S$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $S$  é limitado se existe um número real  $a > 0$  tal que  $\|s\| \leq a$  para todo  $s \in S$ .*

**Definição 12.** *Seja  $S$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que um ponto  $x$  é aderente a  $S$  quando  $x$  for limite de uma seqüência de pontos  $s_n \in S$ .*

**Definição 13.** *Seja  $S$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $S$  é fechado se todo ponto aderente a  $S$  pertence a  $S$ .*

**Definição 14.** *Seja  $X$  um conjunto não-vazio. Uma família  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  é chamada uma topologia em  $X$  se satisfaz as seguintes condições:*

1.  $\emptyset$  e  $X$  pertencem a  $\tau$ .
2. A união de subconjuntos em  $\tau$  é um conjunto em  $\tau$ .
3. A intersecção de um número finito de subconjuntos em  $\tau$  é um conjunto em  $\tau$ .

Um **espaço topológico**, representado por  $(X, \tau)$ , consiste de dois objetos: um conjunto não-vazio  $X$  e uma topologia  $\tau$  em  $X$ . Os subconjuntos em  $\tau$  são chamados de conjuntos abertos em  $(X, \tau)$ .

**Definição 15.** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico e seja  $S$  um subconjunto de  $X$ . Seja  $I$  um conjunto de índices qualquer. Uma **cobertura por abertos** de  $S$  é uma família  $F = \{C_\lambda; \lambda \in I\}$  de subconjuntos abertos  $C_\lambda$  em  $\tau$  tal que

$$S \subset \bigcup_{\lambda \in I} C_\lambda.$$

Uma **subcobertura** de  $S$  é uma subfamília  $F_0 = \{C_\lambda; \lambda \in I'\}$ ,  $I' \subset I$ , tal que ainda se tem

$$S \subset \bigcup_{\lambda \in I'} C_\lambda.$$

**Definição 16.** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico. Dizemos que  $S \subset X$  é **compacto** em  $(X, \tau)$  se toda cobertura por abertos do conjunto  $S$  admite uma subcobertura finita.

**Lema 7.**  $D$  é compacto.

**Demonstração do Lema 7.**

Seja  $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in D$ . Então  $\|d\| = d_1 + \dots + d_n = 1$ . Portanto,  $D$  é limitado.

Podemos observar que  $D = A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_n$ , onde  $A_i = \{v \in \mathbb{R}^n : v_i \geq 0\}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , e  $A_0 = \{v \in \mathbb{R}^n : v_1 + \dots + v_n = 1\}$ . É fácil ver que  $A_i$  é fechado para todo  $i = 0, \dots, n$ . Desta forma, como a interseção finita de subconjuntos fechados do  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto fechado, temos que  $D$  também é fechado.

Como estamos trabalhando em um espaço de dimensão finita,  $\mathbb{R}^n$ , um subconjunto é compacto se ele for fechado e limitado. Assim, o lema 7 está demonstrado.

**Lema 8.**  $D$  é convexo.

**Demonstração do Lema 8.** Sejam  $A_i = \{v \in \mathbb{R}^n : v_i \geq 0\}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , e  $A_0 = \{v \in \mathbb{R}^n : v_1 + \dots + v_n = 1\}$ . É fácil ver que  $A_i$  é convexo para todo  $i = 0, \dots, n$ . Podemos observar que  $D = A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_n$ . É bem conhecido que a interseção de conjuntos convexos em  $\mathbb{R}^n$  é convexa. Desta forma, como  $A_i$  é convexo para todo  $i = 0, \dots, n$ , temos que  $D$  também é convexo. Assim, o lema 8 está demonstrado.

**Definição 17.** Considere um conjunto limitado não vazio  $V \subset \mathbb{R}^n$ . Chamamos **diâmetro** de  $V$  e denotamos por  $diam(V) = \sup \{\|x - y\|; x, y \in V\}$ .

Se  $V$  é compacto (ver definição 16), então o  $diam(V)$  é a maior } (2.1)  
distância entre dois pontos de  $V$ .

**Lema 9.** Seja o conjunto  $D$  definido em (1.6) na página 11. Então

$$diam(D) = 2.$$

**Demonstração do Lema 9.** Sejam  $d, d' \in D$ . Então,

$$\begin{aligned} \|d - d'\| &= |d_1 - d'_1| + \dots + |d_n - d'_n| \leq \\ &\leq |d_1| + |d'_1| + \dots + |d_n| + |d'_n| = \\ &= d_1 + \dots + d_n + d'_1 + \dots + d'_n = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$



Assim,  $\|d - d'\| \leq 2$ .

Sejam os vetores  $\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in D$  e  $\delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in D$ . Calculando a distância entre estes dois vetores, temos

$$\text{dist}(\delta_1, \delta_2) = |1 - 0| + |0 - 1| + 0 + \cdots + 0 = 2.$$

Portanto, o lema 9 está demonstrado.

# Capítulo 3

## Limite do Processo Estocástico

### 3.1 Enunciado e Prova do Análogo da Lei dos Grandes Números para o Nosso Sistema.

Nesta seção iremos mostrar que a distribuição  $\frac{M\Delta_{\text{round}(L \cdot d)}}{L}$  concentra-se na vizinhança do ponto  $\sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r}$ , quando  $L \rightarrow \infty$ . Isto pode ser visto como um análogo da lei dos grandes números para o nosso sistema, formalizado no teorema 1 a seguir.

**Teorema 1.** Para todo  $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in D$  e para todo  $\varepsilon > 0$

$$\text{Prob} \left( \text{dist} \left( \frac{M\Delta_{\text{round}(L \cdot d)}}{L}, M_0 \cdot d \right) > \varepsilon \right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0, \quad (3.1)$$

onde  $\text{dist}$  foi definido em (1.4) na página 10 e  $M_0$  foi definido em (1.16) na página 17.

Antes de demonstrar o teorema 1 apresentaremos alguns resultados importantes.

**Lema 10.** Para todo  $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in D$

$$\sum_{i=1}^n \text{round}(L \cdot d_i) \sum_{r \in \Omega} r \theta_{i,r} = E \left( M \Delta_{\text{round}(L \cdot d)} \right) \quad (3.2)$$

onde  $M$  foi definido em (1.14) na página 14.

**Demonstração do Lema 10.** Denotamos

$$\sum_{k=1}^n N_k \sum_{r \in \Omega} r \cdot \theta_{k,r} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

onde  $N_k = \text{round}(L \cdot d_k)$ .

Para cada  $k = 1, \dots, n$  e cada  $r \in \Omega$ , denotamos  $X_{k,r}$  o número de  $k$ -partículas que sofreram a transformação em um vetor  $r$ . Cada  $X_{k,r} = \sum_{j=1}^{N_k} B_{k,r}^j$ , onde

$$B_{k,r}^j = \begin{cases} 1, & \text{se a } j\text{-ésima } k\text{-partícula transforma-se em } r \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, as variáveis aleatórias  $X_{k,r}$  têm distribuições binomiais  $b(N_k, \theta_{k,r})$ , logo cada  $X_{k,r}$  satisfaz a lei dos grandes números. Desta forma,  $r_i \cdot X_{k,r}$ , onde  $r_i$  é a  $i$ -ésima componente do vetor  $r$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $\forall k = 1, \dots, n$  e  $\forall r \in \Omega$ , também satisfazem a lei dos grandes números.

O número total de  $k$ -partículas após a transformação aleatória é

$$S_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{r \in \Omega} r_k B_{i,r}^j, \quad (3.4)$$

onde  $r_k$  é a  $k$ -ésima componente de  $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ . Vale ressaltar que a soma

$\sum_{r \in \Omega} r_k B_{i,r}^j$  é finita, pois pela condição (1.11) existe um número finito de vetores

nos quais cada  $k$ -partícula pode se transformar, ou seja, existe um número finito de estados possíveis.

Denotamos

$$M\Delta_{\text{round}(L \cdot d)} = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}.$$

Assim, calculando a esperança de  $M\Delta_{\text{round}(L \cdot d)}$ ,

$$E\left(M\Delta_{\text{round}(L \cdot d)}\right) = \begin{pmatrix} E(S_1) \\ \vdots \\ E(S_n) \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} E(S_k) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{r \in \Omega} r_k E(B_{i,r}^j) \\ &= \sum_{i=1}^n N_i \sum_{r \in \Omega} r_k \theta_{i,r} = m_k, \quad \forall k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Portanto, o lema 10 está demonstrado.

**Lema 11.** *Seja  $q \in \Omega$ , onde  $\Omega$  foi definido em (1.1) na página 9. Então*

$$\forall k = 1, \dots, n : \sum_{q \in \Omega} \|q\| \cdot \theta_{k,q} \leq C,$$

onde  $C$  foi definido em (1.11).

**Demonstração do Lema 11.** Pela condição (1.11) na página 13 temos

$$\sum_{q \in \Omega} (q_1 + \dots + q_n) \theta_{k,q} \leq \sum_{q \in \Omega} C \cdot \theta_{k,q} = C \cdot \sum_{q \in \Omega} \theta_{k,q} = C.$$

Assim, o lema 11 está demonstrado.

**Lema 12.** *Para todo  $d \in D$  e para todo  $L > 0$ ,*

$$\text{dist}\left(E\left(M\Delta_{\text{round}(L \cdot d)}\right), L \cdot M_0 \cdot d\right) < n \cdot C, \quad (3.5)$$

onde a constante  $C$  foi definida em (1.11) e  $M_0$  foi definido em (1.16) na página 17.

**Demonstração do Lema 12.** Para todo  $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in D$ , denotamos

$$N_k = \text{round}(L \cdot d_k).$$

Pelo lema 10, calculando uma estimativa para (3.5), temos

$$\begin{aligned} & \text{dist} \left( E \left( M \Delta_{\text{round}(L \cdot d)} \right), L \cdot \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n N_k \sum_{r \in \Omega} r_i \theta_{k,r} - L \cdot \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r_i \theta_{k,r} \right| = \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n (N_k - L \cdot d_k) \sum_{r \in \Omega} r_i \theta_{k,r} \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n |N_k - L \cdot d_k| \sum_{r \in \Omega} r_i \theta_{k,r} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n |N_k - L \cdot d_k| \sum_{r \in \Omega} \sum_{i=1}^n r_i \theta_{k,r}. \end{aligned}$$

Pelo lema 11,

$$\sum_{k=1}^n |N_k - L \cdot d_k| \sum_{r \in \Omega} \sum_{i=1}^n r_i \theta_{k,r} \leq \sum_{k=1}^n |N_k - L \cdot d_k| \cdot C.$$

Sabemos que

$$|N_k - L \cdot d_k| < 1.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^n |N_k - L \cdot d_k| \cdot C < C \cdot \sum_{k=1}^n 1 = n \cdot C.$$

Daqui obtemos (3.5). Assim, o lema 12 está demonstrado.

**Definição 18.** *Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma seqüência de variáveis aleatórias reais. Dizemos que  $X_1, X_2, \dots$  satisfazem a lei fraca dos grandes números se*

$$\forall \varepsilon > 0 : \text{Prob} \left( \left| \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - E(X_j))}{n} \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Lema 13.** *Sejam*

$$X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, \quad X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, \quad \dots, \quad X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots,$$

*n seqüências de variáveis aleatórias reais. Suponhamos que a lei fraca dos grandes números seja verdadeira para cada uma destas seqüências. Então a mesma lei é verdadeira para a soma delas, a saber  $\sum_{i=1}^n X_1^{(i)}, \sum_{i=1}^n X_2^{(i)}, \dots$ .*

**Demonstração do Lema 13.** Vamos provar por indução.

**Base de indução:**  $n = 2$ .

Sejam  $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots$  e  $X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots$ , seqüências de variáveis aleatórias reais. Suponhamos que a lei dos grandes números seja verdadeira para cada uma destas seqüências. Denotamos

$$S_n^{(1)} = X_1^{(1)} + \dots + X_n^{(1)} \quad \text{e} \quad S_n^{(2)} = X_1^{(2)} + \dots + X_n^{(2)}.$$

Denotamos os eventos

$$A_\varepsilon = \left( \left| \frac{S_n^{(1)} - ES_n^{(1)}}{n} \right| \geq \varepsilon \right), \quad B_\varepsilon = \left( \left| \frac{S_n^{(2)} - ES_n^{(2)}}{n} \right| \geq \varepsilon \right)$$

e

$$C_\varepsilon = \left( \left| \frac{\sum_{i=1}^n (X_i^{(1)} + X_i^{(2)}) - E \left( \sum_{i=1}^n (X_i^{(1)} + X_i^{(2)}) \right)}{n} \right| \geq \varepsilon \right).$$

Por hipótese temos,  $Prob(A_\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  e  $Prob(B_\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Observemos que  $A_{\varepsilon/2}^c \cap B_{\varepsilon/2}^c \subset C_\varepsilon^c$ , para cada  $\varepsilon > 0$ . Logo  $C_\varepsilon \subset A_{\varepsilon/2} \cup B_{\varepsilon/2}$ , assim temos que

$$Prob(C_\varepsilon) \leq Prob(A_{\varepsilon/2} \cup B_{\varepsilon/2}) \leq Prob(A_{\varepsilon/2}) + Prob(B_{\varepsilon/2}).$$

Devido a nossa hipótese,  $Prob(A_{\varepsilon/2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  e  $Prob(B_{\varepsilon/2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , logo

$$Prob(C_\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Assim, está provado que a lei dos grandes números também é verdadeira para a seqüência

$$\sum_{i=1}^2 X_1^{(i)}, \sum_{i=1}^2 X_2^{(i)}, \dots \quad (3.6)$$

**Passo de indução:**

Sejam  $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, \dots, X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots$ ,  $n$  seqüências de variáveis aleatórias reais para as quais a lei fraca dos grandes números é verdadeira.

Segundo a hipótese de indução, a mesma lei é verdadeira para

$$\sum_{i=1}^n X_1^{(i)}, \sum_{i=1}^n X_2^{(i)}, \dots$$

Sejam agora  $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, \dots, X_1^{(n+1)}, X_2^{(n+1)}, \dots$ ,  $n + 1$  seqüências de variáveis aleatórias reais para as quais a lei fraca dos grandes números é verdadeira. Queremos mostrar que a mesma lei é verdadeira para

$$\sum_{i=1}^{n+1} X_1^{(i)}, \sum_{i=1}^{n+1} X_2^{(i)}, \dots$$

Consideremos as duas seguintes seqüências de variáveis aleatórias

$$\sum_{i=1}^n X_1^{(i)}, \quad \sum_{i=1}^n X_2^{(i)}, \dots \quad \text{e} \quad X_1^{(n+1)}, \quad X_2^{(n+1)}, \dots$$

Temos por hipótese de indução que vale a lei fraca dos grandes números para cada uma dessas seqüências, assim por (3.6) temos que a lei fraca dos grandes números também é válida para a seqüência

$$\sum_{i=1}^n X_1^{(i)} + X_1^{(n+1)}, \quad \sum_{i=1}^n X_2^{(i)} + X_2^{(n+1)}, \dots$$

Portanto, o lema 13 está demonstrado.

Agora estamos prontos para demonstrar o teorema 1 enunciado na página 28.

**Demonstração do Teorema 1.** Para cada  $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in D$ , denotamos

$$N_k = \text{round}(L \cdot d_k)$$

e

$$\sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r \cdot \theta_{k,r} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Seja  $S_k$  definido em (3.4). Introduzimos os eventos

$$F_{k,\varepsilon} = \left( \left| \frac{S_k}{L} - c_k \right| \geq \varepsilon \right), \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

$$G_\varepsilon = \left( \text{dist} \left( \frac{M \Delta_{\text{round}(Ld)}}{L}, \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r} \right) \geq \varepsilon \right) = \left( \sum_{k=1}^n \left| \frac{S_k}{L} - c_k \right| \geq \varepsilon \right).$$

Queremos mostrar que  $\text{Prob}(G_\varepsilon) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$ .

Consideremos primeiro o seguinte caso. Sejam todos  $d_k > 0$ . Temos  $N_k \geq L \cdot d_k$ , onde  $d_k > 0$ , logo  $N_k \rightarrow \infty$ , quando  $L \rightarrow \infty$ , para todo  $k$ . Assim, pelos



lemas 10 e 13, para cada  $\varepsilon > 0$ ,

$$Prob\left(\left|\frac{S_k - m_k}{L}\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

onde  $m_k$  foi definido em (3.3).

É importante observar que

$$\frac{N_k}{L} = \frac{\text{round}(L \cdot d_k)}{L},$$

é limitada.

Agora, vamos provar que, para cada  $\varepsilon > 0$ ,

$$Prob(F_{k,\varepsilon}) = Prob\left(\left|\frac{S_k}{L} - c_k\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Isto significa por exemplo que para cada  $\varepsilon > 0$  e cada  $\delta > 0$ , existe  $L_0$  tal que

$$L \geq L_0 \implies Prob(F_{1,\varepsilon}) \leq \delta.$$

Devido a (3.7), existe  $L_1$  tal que

$$L \geq L_1 \implies Prob\left(\left|\frac{S_1 - m_1}{L}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Devido ao lema 12, existe  $L_2$  tal que

$$L \geq L_2 \implies \left|\frac{m_1}{L} - c_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

É evidente que

$$\left(\left|\frac{S_1 - m_1}{L}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\frac{m_1}{L} - c_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \implies \left|\frac{S_1}{L} - c_1\right| < \varepsilon.$$

Sabemos, que para cada  $\varepsilon > 0$ ,

$$Prob\left(\left|\frac{S_1 - m_1}{L}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

e pelo lema 12,

$$\left| \frac{m_1}{L} - c_1 \right| \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

Desta forma, temos que para o mesmo  $\varepsilon$

$$Prob(F_{1,\varepsilon}) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

De forma análoga,

$$Prob(F_{k,\varepsilon}) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0, \quad \forall k = 2, \dots, n.$$

Observemos que  $G_\varepsilon \subset F_{1,\varepsilon/n} \cup \dots \cup F_{n,\varepsilon/n}$ , para cada  $\varepsilon > 0$ , assim

$$Prob(G_\varepsilon) \leq Prob(F_{1,\varepsilon/n}) + \dots + Prob(F_{n,\varepsilon/n}).$$

Logo  $Prob(G_\varepsilon) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$ .

Consideremos agora outro caso:  $d_1 = 0$ , então  $N_1 = 0$  e

$$M\Delta_{\text{round}(L \cdot d)} = \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{N_k} V_k^j,$$

ou seja, não existem 1-partículas. Neste caso, quando  $L \rightarrow \infty$ ,  $N_1 = 0$  e  $N_k \rightarrow \infty$ ,  $\forall k = 2, \dots, n$ , e todo o resultado anterior continua válido. De forma

análoga se  $d_k \neq 0$  para algum  $k$ . O caso  $d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  não pode ocorrer pois

$d \in D$ .

Assim, o teorema 1 está demonstrado.

## 3.2 Enunciado e Demonstração do Teorema Sobre o Limite do Processo Estocástico

Nesta seção, vamos mostrar que o análogo determinístico do nosso operador, definido na seção 1.3, faz sentido como um limite do processo estocástico original,

após normalização, quando o número de partículas tende para o infinito.

**Teorema 2.** *Sejam  $Norm$  e  $\tilde{M}$  definidos em (1.17) e (1.18) respectivamente.*

*Então*

$$\forall d \in D, \quad \forall \varepsilon > 0 : \quad Prob \left( \text{dist} \left( Norm \left( M \Delta_{\text{round}(L \cdot d)} \right), \quad \tilde{M}d \right) > \varepsilon \right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

Como já foi dito no final da seção 1.3, o teorema 2 mostra que se o número de partículas tende para o infinito, após normalização o comportamento do processo torna-se determinístico com fórmula explícita (1.18).

Antes de demonstrar o teorema 2 apresentaremos um resultado útil.

**Lema 14.** *Sejam  $A, B \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $A', B'$  os pontos de interseção das retas  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  com  $D$ , respectivamente. Seja*

$$\text{dist}(A, O) \geq L \quad e \quad \text{dist}(A, B) < L \cdot \varepsilon \leq \varepsilon \cdot \text{dist}(A, O),$$

*onde  $\text{dist}$  é definida em (1.4) na página 10. Logo*

$$\text{dist}(A', B') < 4 \cdot \varepsilon.$$

Na figura 3.1, apresentamos uma ilustração do que é enunciado no lema 14, considerando o caso  $n = 2$ .

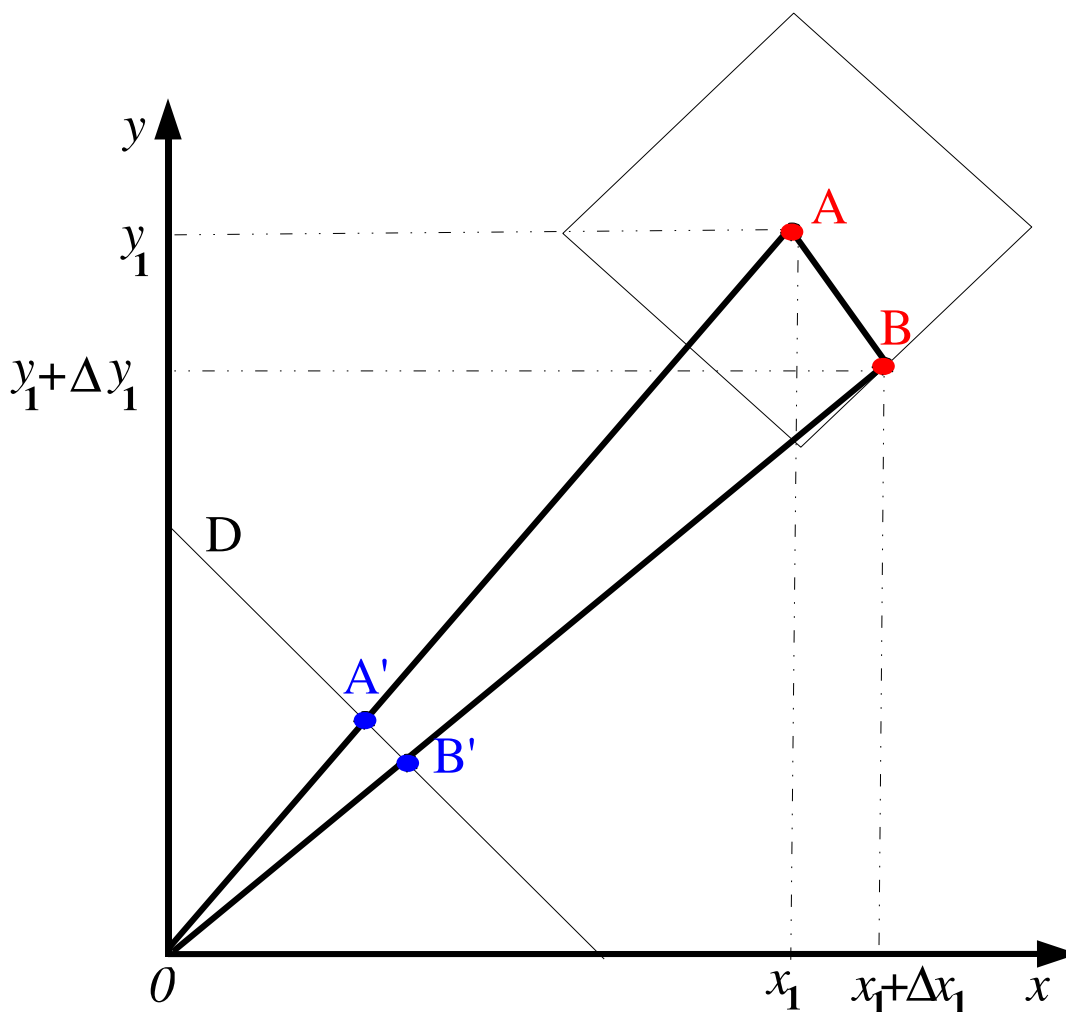


Figura 3.1: Ilustração do lema 14 no caso em que temos apenas dois tipos de partículas, ou seja,  $n = 2$ . Temos os pontos  $A$  e  $B$  em  $\Omega$  e os pontos  $A'$  e  $B'$  pertencentes ao conjunto  $D$ . A forma quadrada da vizinhança do ponto  $A$  é determinada por nossa definição da norma (1.3) na página 10.

**Demonstração do Lema 14.** Devido ao lema 9, basta supor que  $\varepsilon \leq 1/2$ .

Denotamos

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} a_1 + \Delta a_1 \\ \vdots \\ a_n + \Delta a_n \end{pmatrix}.$$

Logo  $|\Delta a_1| + \dots + |\Delta a_n| < L \cdot \varepsilon$ .

Introduzimos

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{a_1}{a_1 + \cdots + a_n} \\ &\vdots \\ a'_n &= \frac{a_n}{a_1 + \cdots + a_n}, \end{aligned}$$

$$\text{e } A' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}.$$

Denotamos

$$\begin{aligned} b'_1 &= \frac{a_1 + \Delta a_1}{(a_1 + \cdots + a_n) + (\Delta a_1 + \cdots + \Delta a_n)} \\ &\vdots \\ b'_n &= \frac{a_n + \Delta a_n}{(a_1 + \cdots + a_n) + (\Delta a_1 + \cdots + \Delta a_n)}, \end{aligned}$$

$$\text{e } B' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\begin{aligned} |b'_k - a'_k| &= \left| \frac{a_k + \Delta a_k}{\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n \Delta a_k} - \frac{a_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \right| = \left| \frac{\Delta a_k \cdot \sum_{k=1}^n a_k - a_k \sum_{k=1}^n \Delta a_k}{\left[ \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n \Delta a_k \right] \sum_{k=1}^n a_k} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\Delta a_k}{\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n \Delta a_k} \right| + \left| \frac{a_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \right| \left| \frac{\sum_{k=1}^n \Delta a_k}{\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n \Delta a_k} \right|. \end{aligned}$$

Desta forma

$$\begin{aligned}
& |b'_1 - a'_1| + \cdots + |b'_n - a'_n| \leq \\
& \leq \left| \frac{\Delta a_1}{\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n \Delta a_k} \right| + \cdots + \left| \frac{\Delta a_n}{\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n \Delta a_k} \right| + \\
& + \left( \left| \frac{a_1}{\sum_{k=1}^n a_k} \right| + \cdots + \left| \frac{a_n}{\sum_{k=1}^n a_k} \right| \right) \cdot \left| \frac{\sum_{k=1}^n \Delta a_k}{\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n \Delta a_k} \right| = \\
& = \frac{\sum_{k=1}^n |\Delta a_k|}{\left| \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n \Delta a_k \right|} + \frac{\left| \sum_{k=1}^n \Delta a_k \right|}{\left| \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n \Delta a_k \right|} \leq \frac{2 \sum_{k=1}^n |\Delta a_k|}{\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n \Delta a_k}.
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$L \leq \text{dist}(A, O) = a_1 + \cdots + a_n \quad \text{e} \quad \text{dist}(B, A) = |\Delta a_1| + \cdots + |\Delta a_n| < L \cdot \varepsilon.$$

Desta forma,

$$(a_1 + \cdots + a_n) + (\Delta a_1 + \cdots + \Delta a_n) > L - L \cdot \varepsilon.$$

Portanto,

$$\frac{2 \sum_{k=1}^n |\Delta a_k|}{\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n \Delta a_k} < \frac{2 \cdot L \cdot \varepsilon}{L(1 - \varepsilon)} = \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Pois  $\varepsilon \leq 1/2$ ,

$$\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq \frac{2\varepsilon}{1/2} = 4 \cdot \varepsilon.$$

Desta forma,

$$\text{dist}(B', A') = |b'_1 - a'_1| + \cdots + |b'_n - a'_n| < 4 \cdot \varepsilon.$$

Assim, o lema 14 está demonstrado.

Sejam agora um ponto  $c \in \mathbb{R}^n$ , os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n; \text{dist}(x, c) > \varepsilon\}$$

e

$$B = \{y \in \mathbb{R}^n; \text{dist}(y, c) > \varepsilon/2\},$$

onde  $\varepsilon > 0$ . É fácil ver que

$$A \subset B.$$

Assim, em nossas demonstrações é suficiente supor

$$\varepsilon \leq 1/2.$$

(3.8)

Agora estamos prontos para demonstrar o teorema 2.

**Demonstração do Teorema 2.** Pelo teorema 1, apresentado na página 28,

$$\forall \varepsilon > 0 : \text{Prob} \left( \text{dist} \left( M\Delta_{\text{round}(L \cdot d)}, L \cdot M_0 d \right) > L \cdot \varepsilon \right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

Pelo lema 14, apresentado na página 37, já vimos que  $\forall \varepsilon \leq 1/2$  e  $\forall q \in \Omega$ ,

$$\text{dist}(q, L \cdot M_0 \cdot d) < L \cdot \varepsilon \implies \text{dist} \left( \text{Norm}(q), \text{Norm}(M_0 d) \right) < 4 \cdot \varepsilon.$$

Desta forma,

$$\forall \varepsilon > 0 : \text{Prob} \left( \text{dist} \left( \text{Norm}(M\Delta_{\text{round}(L \cdot d)}), \text{Norm}(L \cdot M_0d) \right) > 4 \cdot \varepsilon \right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

Assim, o teorema 2 está demonstrado.



# Capítulo 4

## Existência e Unicidade do Ponto Fixo

### 4.1 Enunciado e Prova da Existência do Ponto Fixo

Para todo conjunto  $S$  e toda aplicação  $f : S \rightarrow S$ , chamamos  $v \in S$  um **ponto fixo** se  $f(v) = v$ .

Agora direcionamos os nossos estudos para os pontos fixos do sistema dinâmico com a aplicação  $\tilde{M} : D \rightarrow D$  definida em (1.18) na página 18.

**Teorema 3.** *A aplicação  $\tilde{M} : D \rightarrow D$  tem no mínimo um ponto fixo.*

Antes de demonstrar o teorema 3 e ao longo deste trabalho, apresentaremos alguns teoremas auxiliares.

**Definição 19.** *Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação definida no conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $f$  é **contínua** no ponto  $a \in X$  quando,*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0; \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua em todos os pontos do conjunto  $X$ , dizemos simplesmente que  $f$  é uma **aplicação contínua**.

**Teorema Auxiliar 1. (Corolário do Teorema de Brouwer)** *Sejam  $K$  um conjunto convexo compacto em  $\mathbb{R}^n$  e uma aplicação  $f : K \longrightarrow K$  contínua. Então  $f$  tem pelo menos um ponto fixo.*

O teorema auxiliar 1 é uma consequência direta do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [10] e [30].

**Definição 20.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que uma aplicação  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é  $k$ -Lipschitziana quando para quaisquer  $x, y \in X$ , temos*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|,$$

onde  $k > 0$  é uma constante e  $\|\cdot\|$  foi definido em (1.3) na página 10.

**Teorema 4.** *A aplicação  $\tilde{M}$  é Lipschitziana, ou seja, para todo  $d, d' \in D$ ,*

$$\text{dist}(\tilde{M}d', \tilde{M}d) < 4 \cdot C \cdot \text{dist}(d', d),$$

onde  $\text{dist}$  foi definida em (1.4) e a constante  $C$  foi definida em (1.11).

Para a demonstração do teorema 4 é necessário o seguinte resultado:

**Lema 15.** *Para todo  $d, d' \in D$ ,*

$$\text{dist}\left(\sum_{k=1}^n d'_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r}, \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r}\right) \leq C \cdot \text{dist}(d', d), \quad (4.1)$$

onde a constante  $C$  foi definida em (1.11) na página 13 e  $\text{dist}$  foi definida em (1.4).

**Demonstração do Lema 15.**

$$\text{Denotemos } d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}, \quad d' = \begin{pmatrix} d'_1 \\ \vdots \\ d'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 + \Delta d_1 \\ \vdots \\ d_n + \Delta d_n \end{pmatrix}.$$

Calculando uma estimativa para (4.1) temos

$$\begin{aligned}
& \text{dist} \left( \sum_{k=1}^n d'_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r}, \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n d'_k \sum_{r \in \Omega} r_i \theta_{k,r} - \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r_i \theta_{k,r} \right| = \\
&= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n (d'_k - d_k) \sum_{r \in \Omega} r_i \theta_{k,r} \right| = \\
&= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n \Delta d_k \sum_{r \in \Omega} r_i \theta_{k,r} \right| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^n |\Delta d_k| \sum_{r \in \Omega} r_1 \theta_{k,r} + \cdots + \sum_{k=1}^n |\Delta d_k| \sum_{r \in \Omega} r_n \theta_{k,r} = \\
&= \sum_{k=1}^n |\Delta d_k| \sum_{r \in \Omega} (r_1 + \cdots + r_n) \theta_{k,r}.
\end{aligned}$$

Pelo lema 11

$$\sum_{k=1}^n |\Delta d_k| \sum_{r \in \Omega} (r_1 + \cdots + r_n) \theta_{k,r} \leq \sum_{k=1}^n |\Delta d_k| \cdot C = C \cdot \sum_{k=1}^n |\Delta d_k| = C \cdot \text{dist}(d', d).$$

Daqui obtemos (4.1). Assim, o lema 15 está demonstrado.

**Demonstração do Teorema 4 enunciado na página 44.** Tomemos  $d, d' \in$

$$D. \text{ Denotemos } d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \text{ e } d' = \begin{pmatrix} d'_1 \\ \vdots \\ d'_n \end{pmatrix}.$$

Devido ao lema 9, basta supor que  $\text{dist}(d', d) < \frac{1}{2C}$ .

Temos, pelo lema 15

$$\text{dist} \left( L \sum_{k=1}^n d'_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r}, L \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r} \right) \leq L \cdot C \cdot \text{dist}(d', d).$$

Pela definição de norma, apresentada na página 10,

$$\left\| \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r} \right\| = \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} \|r\| \theta_{k,r}.$$

Pelo lema 5,

$$\sum_{r \in \Omega} \|r\| \theta_{k,r} > 0, \quad \text{para todo } k.$$

Como  $d_1 + \dots + d_n = 1$ , então

$$\sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} \|r\| \theta_{k,r} \geq 1.$$

Assim, pelo lema 14 temos

$$\begin{aligned} & \text{dist} \left( \text{Norm} \left( L \sum_{k=1}^n d'_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r} \right), \text{Norm} \left( L \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r} \right) \right) < \\ & < 4 \cdot C \cdot \text{dist}(d', d). \end{aligned}$$

É evidente que

$$\begin{aligned} & \text{dist} \left( \text{Norm} \left( L \sum_{k=1}^n d'_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r} \right), \text{Norm} \left( L \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r} \right) \right) = \\ & = \text{dist} \left( \text{Norm} \left( \sum_{k=1}^n d'_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r} \right), \text{Norm} \left( \sum_{k=1}^n d_k \sum_{r \in \Omega} r \theta_{k,r} \right) \right). \end{aligned}$$

Assim, o teorema 4 está demonstrado.

É bem conhecido que toda aplicação Lipschitziana é contínua. Portanto, pelo teorema 4, temos que a aplicação  $\tilde{M}$  é contínua.

**Demonstração do Teorema 3 enunciado na página 43.** Podemos reescrever o conjunto  $D$  definido em (1.6) na página 11 da seguinte forma

$$D = \{v \in \mathbb{R}_+^n; \text{dist}(v, O) = 1\},$$

onde  $\text{dist}$  foi definida em (1.4). Pelos lemas 7 e 8 temos que  $D \subset \mathbb{R}^n$  é compacto e convexo. Pelo teorema 4 a aplicação  $\tilde{M} : D \rightarrow D$  é contínua. Assim, pelo teorema auxiliar 1,  $\tilde{M}$  possui pelo menos um ponto fixo  $d \in D$ . Portanto, o teorema 3 está demonstrado.

## 4.2 Enunciado e Prova da Unicidade do Ponto Fixo

Nesta seção vamos mostrar que sob condições adicionais o ponto fixo do sistema com a aplicação  $\tilde{M}$  é único e o sistema tende para ele a partir de toda condição inicial no conjunto  $D^+$ , definido em (1.7) na página 11.

Inicialmente, apresentaremos alguns resultados já conhecidos, os quais serão importantes para as nossas demonstrações.

**Definição 21.** *Seja  $M = (m_{ij})$  uma matriz de ordem  $n$  com elementos reais. Chamamos  $M$  **não negativa** ( $M \geq 0$ ) ou **positiva** ( $M > 0$ ) se todos os elementos de  $M$  são respectivamente não negativos ( $m_{ij} \geq 0$ ) ou positivos ( $m_{ij} > 0$ ).*

**Definição 22.** *Seja  $M$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Chamamos  $M$  **reduzível** se existe uma permutação de índices a qual reduz a matriz  $M$  na forma*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix},$$

onde  $A$  e  $C$  são matrizes quadradas e  $0$  é uma matriz nula. Caso contrário chamamos a matriz  $M$  de **irreduzível**.

**Definição 23.** *Sejam  $M$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $I$  a matriz identidade de ordem  $n$ . Então  $M - \lambda I$  é chamada a **matriz característica** de  $M$ . Chamamos*

$$\det(M - \lambda I)$$

o **polinômio característico** de  $M$ , onde  $\det(M - \lambda I)$  indica o determinante da matriz  $M - \lambda I$ .

**Definição 24.** *Seja  $M$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Dizemos que um escalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  é um **autovalor** de  $M$  se existe um vetor não nulo  $v \in \mathbb{K}^n$  para o qual  $Mv = \lambda v$ . A todo vetor que satisfaz esta relação chamamos **autovetor** de  $M$  relacionado ao autovalor  $\lambda$ .*

**Definição 25.** *Sejam  $\mathcal{P}(\lambda)$  um polinômio em  $\lambda$  e  $x$  uma raiz de  $\mathcal{P}$  de multiplicidade  $k$ . Dizemos então que  $x$  é uma **raiz simples** se  $k = 1$ .*

**Teorema Auxiliar 2. (Perron)** *Seja  $M$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  positiva. Então  $M$  sempre tem um autovalor real e positivo  $\lambda_{dom}$ , chamado **dominante**, o qual é uma raiz simples do polinômio característico e excede o módulo de todos os outros autovalores. Para este autovalor maximal  $\lambda_{dom}$  existe um autovetor de coordenadas positivas da matriz  $M$  correspondente a  $\lambda_{dom}$ .*

**Teorema Auxiliar 3. (Frobenius)** *Seja  $M$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  não negativa e irredutível (ver definição 22). Então  $M$  sempre tem um autovalor positivo  $\lambda_{dom}$ , chamado dominante, o qual é uma raiz simples do polinômio característico. Os módulos de todos os outros autovalores não excedem  $\lambda_{dom}$ . Para o autovalor maximal  $\lambda_{dom}$  existe um autovetor de coordenadas positivas da matriz  $M$  correspondente a  $\lambda_{dom}$ .*

Além disso, se  $M$  tem  $h$  autovalores  $\lambda_0 = \lambda_{dom}, \lambda_1, \dots, \lambda_{h-1}$  de módulo  $\lambda_{dom}$ , então esses números são todos distintos e são raízes da equação

$$\lambda^h - \lambda_{dom}^h = 0.$$

Os teoremas auxiliares 2 e 3 são demonstrados em muitos textos. Referimos o leitor para [7] e [16].

**Definição 26.** *Seja  $M$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  não negativa e irredutível (ver definição 22) e seja  $\lambda_{dom}$  o seu autovalor dominante. Seja  $h$  o número de autovalores da matriz  $M$  cujos módulos são iguais a  $\lambda_{dom}$ . Se  $h = 1$ , chamamos  $M$  de **primitiva**, se  $h > 1$ , a matriz é chamada **não primitiva**, e  $h$  é chamado o **índice de não-primitividade**.*

**Teorema Auxiliar 4.** *Seja  $M$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  não negativa. A matriz  $M$  é primitiva se e somente se existe uma potência de  $M$  tal que ela é positiva, ou seja, existe  $k$  tal que  $M^k > 0$ .*

A demonstração do teorema auxiliar 4 pode ser vista em [7].

**Definição 27.** *Seja  $\mathcal{P}(\lambda) = a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0$  um polinômio em  $\lambda$  de grau  $n$ . Dizemos que  $\mathcal{P}$  é um **polinômio mônico** se  $a_n = 1$ .*

**Definição 28.** *Sejam  $M$  uma matriz sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , e  $\mathcal{P}(\lambda)$  um polinômio sobre  $\mathbb{K}$ . Seja*

$$\mathcal{P}(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

*Definimos*

$$\mathcal{P}(M) = a_kM^k + a_{k-1}M^{k-1} + \dots + a_1M + a_0I,$$

*onde  $I$  é a matriz identidade de ordem igual a da matriz  $M$ . Se  $M$  é uma matriz com ordem  $n \times n$ ,  $\mathcal{P}(M)$  também é uma matriz com ordem  $n \times n$ .*

**Definição 29.** *Seja  $M$  uma matriz quadrada sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Denotemos por  $Pol(M)$  o conjunto de todos os polinômios  $\mathcal{P}(\lambda)$  para os quais  $\mathcal{P}(M)$  seja igual a uma matriz nula. Seja  $m(\lambda)$  o polinômio mônico de menor grau em  $Pol(M)$ . Dizemos então que  $m(\lambda)$  é o **polinômio mínimo** de  $M$ .*

**Definição 30.** *Sejam  $M$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  definida sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e  $\lambda$  um autovalor de  $M$ . Chamamos **autoespaço** de  $\lambda$  o subespaço de  $\mathbb{K}^n$  formado por todos os autovetores associados a  $\lambda$ .*

**Definição 31.** *Seja  $\lambda$  um autovalor de uma matriz  $M$ . Denotamos por **multiplicidade algébrica** de  $\lambda$  a multiplicidade de  $\lambda$  como raiz do polinômio característico de  $M$ . Denotamos por **multiplicidade geométrica** de  $\lambda$  como a dimensão de seu autoespaço.*

**Definição 32.** *Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais sobre um mesmo corpo  $\mathbb{K}$  e uma aplicação linear  $T : V \longrightarrow W$ . Sejam  $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ , bases ordenadas de  $V$  e  $W$ , respectivamente. Assim, para todo  $i = 1, \dots, n$ , temos*

$$Tv_i = a_{1,i}w_1 + a_{2,i}w_2 + \dots + a_{m,i}w_m.$$

*Definimos como a representação matricial de  $T$  nas bases ordenadas  $\mathcal{B}_V$  e  $\mathcal{B}_W$  a matriz*

$$[T]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Seja  $T : V \longrightarrow V$  um operador linear onde  $V = \mathbb{R}^n$  ou  $V = \mathbb{C}^n$  }  
 e  $\mathcal{B}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^n$  ou de  $\mathbb{C}^n$ . Neste caso, a representação } (4.2)  
 matricial de  $T$  nesta base  $\mathcal{B}$  vai ser denotada também por  $T$ .



Chamamos **matrizes de Jordan** as matrizes do seguinte tipo:

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_k \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

de ordem  $n \geq 1$ , onde para todo  $x = 1, \dots, k$ ,

$$B_x = \begin{pmatrix} \lambda_x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_x \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

**Teorema Auxiliar 5.** *Seja  $T : V \longrightarrow V$  um operador linear cujos polinômios característico e mínimo são respectivamente,*

$$\det(T - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{s_k} \quad e \quad m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k},$$

onde para todo  $i = 1, \dots, k$   $\lambda_i$  são distintos. Então  $T$  admite uma representação matricial como uma matriz  $J$  de Jordan, definida em (4.3). Para cada  $\lambda_i$  os blocos correspondentes  $B_i$  têm as seguintes propriedades:

- Existe ao menos um bloco  $B_i$  de ordem  $r_i$ , todos os demais blocos  $B_i$  são de ordem menor ou igual a  $r_i$ .
- A soma das ordens dos blocos  $B_i$  é  $s_i$ .
- O número de blocos  $B_i$  é igual à multiplicidade geométrica de  $\lambda_i$ .
- O número de blocos  $B_i$  de cada ordem possível é univocamente determinado por  $T$ .

Podemos encontrar uma demonstração do teorema auxiliar 5 em [15].

**Definição 33.** *Seja  $T : V \longrightarrow V$  um operador linear. A matriz  $J$  de Jordan definida em (4.3) é chamada **forma canônica de Jordan** do operador  $T$ . Cada bloco diagonal  $B_x$  definido em (4.4) é chamado **bloco de Jordan** associado ao autovalor  $\lambda_x$ .*

**Teorema Auxiliar 6.** *Seja  $T : V \longrightarrow V$  um operador linear em um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Então existe uma base na qual a matriz de  $T$  tem a forma canônica de Jordan.*

Uma demonstração para o teorema auxiliar 6 pode ser vista em [14].

Seja  $T$  uma matriz real. Sejam  $\lambda_{dom}, \dots, \lambda_{n-1}$  os autovalores da matriz  $T$ . Se a matriz  $T$  é primitiva logo, pelo teorema auxiliar 3, existe um autovalor maximal denotado por  $\lambda_{dom}$ , tal que

$$\lambda_{dom} > |\lambda_1|, \dots, \lambda_{dom} > |\lambda_{n-1}|. \quad (4.5)$$

Assim, considerando as condições de (4.5), podemos escrever a forma canônica de Jordan do operador  $T$ , definida em (4.3), da seguinte forma

$$J = \begin{pmatrix} B_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_k \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

onde  $B_0$  é uma matriz de ordem 1 definida por

$$B_0 = (\lambda_{dom})$$

e para todo  $x = 1, \dots, k$ ,  $B_x$  foi definido em (4.4).

Denotamos por  $n_0, \dots, n_k$  os números naturais tais que para cada elemento  $(B_x)_{i,j}$  temos  $i, j = n_{x-1} + 1, \dots, n_x$ , onde  $n_0 = 1$  e  $n_k = n$ . Em outras palavras, o tamanho da  $x$ -ésima caixa é  $(n_x - n_{x-1})$ . (4.7)

**Definição 34.** *Seja  $V$  um espaço vetorial e  $T$  um operador linear sobre  $V$ . Se  $W$  é um subespaço de  $V$ , dizemos que  $W$  é **invariante** sob  $T$  se para cada vetor  $w$  em  $W$ ,  $Tw \in W$ , isto é, se  $T(W) \subset W$ .*

**Teorema Auxiliar 7. (Teorema da Decomposição Primária)** *Seja  $T$  um operador linear sobre o espaço vetorial  $V$  de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Seja  $m(\lambda)$  o polinômio mínimo de  $T$ ,*

$$m(\lambda) = (m_1(\lambda))^{r_1} (m_2(\lambda))^{r_2} \dots (m_k(\lambda))^{r_k},$$

*onde os  $m_i(\lambda)$  são polinômios distintos, irredutíveis e mônicos sobre  $\mathbb{K}$  e os  $r_i$  são inteiros positivos. Seja  $W_i$  o núcleo de  $(m_i(T))^{r_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Então*

- $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ , onde  $\oplus$  indica soma direta;
- cada  $W_i$  é invariante sob  $T$ ;
- se  $T_i$  é o operador induzido sobre  $W_i$  por  $T$ , então o polinômio mínimo de  $T_i$  é  $(m_i(\lambda))^{r_i}$ .

Uma demonstração para o teorema auxiliar 7 pode ser encontrada em [9].

**Definição 35.** *Seja  $\mathcal{P}(\lambda)$  o polinômio característico da aplicação linear  $T : V \longrightarrow V$ , em que  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita  $n$ . Suponhamos que*

$$\mathcal{P}(\lambda) = (\mathcal{P}_1(\lambda))^{s_1} \dots (\mathcal{P}_j(\lambda))^{s_j}$$

*seja a decomposição de  $\mathcal{P}(\lambda)$  em fatores irredutíveis, com  $\mathcal{P}_i(\lambda) \neq \mathcal{P}_k(\lambda)$  para  $i \neq k$ . Definimos, para  $i = 1, \dots, j$ , o **autoespaço generalizado** associado ao polinômio  $\mathcal{P}_i(\lambda)$  como o conjunto de todos os vetores  $v \in V$  para os quais existe um inteiro positivo  $k$  tal que*

$$(\mathcal{P}_i(T))^k \cdot v = \bar{0},$$

*onde  $\bar{0}$  é a matriz nula. No caso em que  $\mathcal{P}_i(\lambda) = \lambda - \lambda_i$ , sendo  $\lambda_i$  um autovalor de  $T$ , os elementos não nulos do autoespaço generalizado são chamados **autovetores generalizados** de  $T$  associados ao autovalor  $\lambda_i$ .*

**Definição 36.** *Seja um operador linear  $T : V \longrightarrow V$ , em que  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Seja  $v \in V$ , tal que  $v$  é não nulo. Definimos o **subespaço  $T$ -cíclico** de  $V$  gerado por  $v$ , como o subespaço dos vetores da forma  $\mathcal{P}(T)v$ , onde  $\mathcal{P}(\lambda)$  é um polinômio sobre  $\mathbb{K}$ , e o denotamos por  $Z(v, T)$ . O subespaço  $Z(v, T)$  é o menor subespaço invariante sob  $T$  que contém  $v$ .*

**Definição 37.** *Seja um operador linear  $T : V \longrightarrow V$ , em que  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Seja  $v \in V$ , tal que  $v$  é não nulo. Definimos o  **$T$ -anulador** de  $v$  como o ideal sobre  $\mathbb{K}$  formado pelos polinômios  $\mathcal{P}(\lambda)$  sobre  $\mathbb{K}$  tais que  $\mathcal{P}(T)v = \bar{0}$ . O único polinômio mônico que gera este ideal será chamado **polinômio mínimo** de  $v$ .*

**Teorema Auxiliar 8.** *Sejam  $T$  um operador linear em um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{K}$  e  $v \in V$  um vetor não nulo. Então*

- o conjunto  $\mathcal{B} = \{v, T(v), \dots, T^{k_0-1}(v)\}$  é uma base de  $Z(v, T)$ , onde  $k_0$  é o grau do polinômio mínimo de  $v$ . Em particular, a dimensão de  $Z(v, T)$  é igual ao grau do polinômio mínimo de  $v$ .
- se  $T_0 : Z(v, T) \longrightarrow Z(v, T)$  é o operador linear induzido pela restrição de  $T$ , então o polinômio mínimo de  $T_0$  é igual ao polinômio mínimo de  $v$ .

Uma demonstração para o teorema auxiliar 8 pode ser encontrada em [9].

$$\left. \begin{array}{l} \text{Seja } \mathcal{P}(\lambda) \text{ um polinômio. Denotamos o grau do polinômio } \mathcal{P}(\lambda) \\ \text{por } \text{grau}(\mathcal{P}(\lambda)). \\ \text{Seja } V \text{ um espaço vetorial. Denotamos a dimensão de } V \text{ por} \\ \text{dim}(V). \end{array} \right\} (4.8)$$

**Teorema Auxiliar 9.** *Seja*

$$\mathcal{P}(\lambda) = (\mathcal{P}_1(\lambda))^{s_1} \dots (\mathcal{P}_k(\lambda))^{s_k}$$

a decomposição em fatores irredutíveis do polinômio característico da aplicação linear  $T : V \longrightarrow V$ , em que  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita  $n$  e  $\mathcal{P}_i(\lambda) \neq \mathcal{P}_j(\lambda)$  para  $i \neq j$ . Seja  $m(\lambda)$  o polinômio mínimo de  $T$ ,

$$m(\lambda) = (m_1(\lambda))^{r_1} (m_2(\lambda))^{r_2} \dots (m_k(\lambda))^{r_k},$$

onde os  $m_i(\lambda)$  são polinômios distintos, irredutíveis e mônicos. Então, para todo  $i = 1, \dots, k$ ,

$$\text{grau}((\mathcal{P}_i(\lambda))^{s_i}) = \text{dim}(Ker[(m_i(T))^{r_i}]),$$

onde  $Ker[(m_i(T))^{r_i}]$  é núcleo de  $(m_i(T))^{r_i}$ .

Uma demonstração para o teorema auxiliar 9 pode ser encontrada em [9].

**Teorema Auxiliar 10. (Teorema da Decomposição Cíclica)** *Seja  $T$  um operador linear em um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{K}$  com polinômio mínimo  $m(\lambda) = (\lambda - a)^r$ . Então existem vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  tais que*

$$\begin{cases} V = Z(v_1, T) \oplus Z(v_2, T) \oplus \dots \oplus Z(v_n, T), \\ \text{grau}(m(\lambda)) = \dim(Z(v_1, T)) \geq \dim(Z(v_2, T)) \geq \dots \geq \dim(Z(v_n, T)) \end{cases} \quad (4.9)$$

Aqui  $\oplus$  indica soma direta.

*Esta decomposição é dimensionalmente única, ou seja, para todo  $i = 1, \dots, n$ , a  $\dim(Z(v_i, T))$  e o inteiro  $n$  são determinados de modo único por (4.9).*

Uma demonstração para o teorema auxiliar 10 pode ser encontrada em [9].

**Definição 38.** *Seja (4.9) a decomposição cíclica determinada pelo operador  $T : V \rightarrow V$  com polinômio mínimo  $m(\lambda) = (\lambda - a)^r$ . Chamamos de **base de Jordan** de  $V$  a base ordenada  $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ , onde  $\mathcal{B}_i$  é uma base de  $Z(v_i, T)$ .*

**Teorema 5. (O Nosso Teorema Principal)** *Seja a matriz  $M_0$ , definida em (1.16) na página 17, primitiva. Então a seqüência de vetores  $\tilde{M}^t d$  tem limite quando  $t \rightarrow \infty$  e este limite é o mesmo para todo vetor inicial  $d \in D^+$ , onde  $D^+$  foi definido em (1.7) na página 11.*

Antes de demonstrar o teorema 5 vamos apresentar alguns resultados preliminares.

**Definição 39.** *Chamamos vetores  $v$  e  $w$  **colineares** e escrevemos  $v \parallel w$  se existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $v = a \cdot w$  ou  $w = a \cdot v$ .*

**Lema 16.** Se  $v \parallel w$  e os vetores  $v$  e  $w$  são positivos, então

$$Norm(v) = Norm(w).$$

**Demonstração do Lema 16.** Como  $v \parallel w$ , e os vetores  $v$  e  $w$  são positivos,  $v = a \cdot w$  e  $a > 0$ , logo

$$Norm(v) = Norm(a \cdot w) = \frac{a \cdot w}{|a| \|w\|} = \frac{w}{\|w\|} = Norm(w).$$

Assim, o lema 16 está demonstrado.

**Lema 17.** Sejam a matriz  $M_0$ , definida em (1.16), primitiva e  $\lambda_{dom}$  seu autovalor dominante. Então  $D$  contém exatamente um elemento, denotado por  $d_{dom} \in D^+$ , que é autovetor de  $M_0$  com autovalor  $\lambda_{dom}$ .

**Demonstração do Lema 17.** Pelo teorema auxiliar 3 (Frobenius) e pela definição 26, se a matriz  $M_0$  é primitiva, então existe um autovalor dominante  $\lambda_{dom}$  positivo, de multiplicidade algébrica (ver definição 31) igual a um e um autovetor  $v_{dom}$  de coordenadas positivas da matriz  $M_0$  correspondente a  $\lambda_{dom}$ . É bem conhecido que se  $\lambda$  é um autovalor de uma matriz, então a multiplicidade geométrica (ver definição 31) de  $\lambda$  é menor ou igual a sua multiplicidade algébrica. Logo, como a multiplicidade algébrica de  $\lambda_{dom}$  é um, o espaço gerado pelos autovetores de  $M_0$  com autovalor  $\lambda_{dom}$  tem dimensão 1. Assim,  $B = \{v_{dom}\}$  é uma base para este espaço. Denotamos  $d_{dom} = Norm(v_{dom})$ . Desta forma,  $d_{dom} \in D$ . Como  $v_{dom}$  é autovetor de  $M_0$ , então  $Norm(v_{dom})$  também é, pois

$$M_0(Norm(v_{dom})) = M_0 \frac{v_{dom}}{\|v_{dom}\|} = \frac{1}{\|v_{dom}\|} M_0 v_{dom} = \frac{\lambda_{dom} v_{dom}}{\|v_{dom}\|} = \lambda_{dom} Norm(v_{dom}).$$

Vamos provar agora que  $d_{dom}$  é o único autovetor de  $M_0$  associado a  $\lambda_{dom}$  em  $D$ . Suponhamos que exista um outro autovetor de coordenadas positivas,

denotado  $u_{dom}$ , de  $M_0$  com autovalor  $\lambda_{dom}$ , tal que  $u_{dom} \neq v_{dom}$ . Desta forma, como  $u_{dom}$  pertence ao espaço gerado pelos autovetores de  $M_0$  com autovalor  $\lambda_{dom}$ , o qual possui base  $B$ , podemos escrever  $u_{dom} = a_1 v_{dom}$ . Deste modo, pelo lema 16,  $Norm(u_{dom}) = Norm(v_{dom}) = d_{dom}$ . Portanto, o lema 17 está demonstrado.

**Lema 18.** *Sejam a matriz  $M_0$  definida em (1.16) e  $d \in D$  um autovetor qualquer de  $M_0$  com autovalor  $\lambda > 0$ . Então  $d$  é um ponto fixo de  $\tilde{M}$ , definido em (1.18).*

**Demonstração do Lema 18.** Sabemos que

$$\lambda > 0 \implies \lambda = |\lambda| \quad \text{e} \quad (4.10)$$

$$d \in D \implies \|d\| = 1. \quad (4.11)$$

Desta forma, por (4.10), (4.11) e como  $d$  é um autovetor de  $M_0$  com autovalor  $\lambda > 0$ ,

$$\tilde{M}d = Norm(M_0d) = Norm(\lambda d) = \frac{\lambda d}{\|\lambda d\|} = \frac{\lambda d}{|\lambda| \|d\|} = d.$$

Portanto, o lema 18 está demonstrado.

Os lemas 17 e 18 nos apresentam as condições para as quais o operador determinístico  $\tilde{M}$  possui ponto fixo. Agora direcionamos os nossos estudos com o objetivo de provar que a seqüência de vetores  $\tilde{M}^t d$  tende para este ponto fixo quando  $t \rightarrow \infty$ , para todo vetor inicial  $d \in D^+$ , o que implica que o ponto fixo é único.

Como é comum, denotamos o número de combinações simples de  $p$  objetos entre  $n$  objetos por

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{se } 0 \leq p \leq n.$$



Por conveniência, definimos que  $C_n^p = 0$  em todos os casos onde a condição  $0 \leq p \leq n$  é falsa.

**Lema 19.** *Sejam  $m, n, p$  inteiros e  $m \geq 0$ ,  $n \geq 0$  e  $0 \leq p \leq m + n$ . Então*

$$C_{m+n}^p = \sum_{k=0}^p C_m^k \cdot C_n^{p-k}. \quad (4.12)$$

**Demonstração do Lema 19.** Sejam  $m$  bolas brancas e  $n$  bolas pretas, logo temos  $m + n$  bolas no total. O número  $C_{m+n}^p$  é o número de modos de que podemos escolher  $p$  bolas dentre as nossas  $m + n$  bolas. Por outro lado, nós podemos classificar o conjunto de modos de escolher  $p$  bolas de acordo com o número de  $k$  bolas brancas escolhidas. O número de modos de escolher  $k$  bolas brancas e  $p - k$  bolas pretas é  $C_m^k \cdot C_n^{p-k}$ . A soma destes números é  $C_{m+n}^p$ , logo a fórmula (4.12) segue. Portanto, o lema 19 está demonstrado.

Tipicamente, a expressão  $0^0$  é considerada indefinida. Porém, em prol do lema 20, vamos definir  $0^0 = 1$ .

**Lema 20.** *Seja a matriz  $B$  de ordem  $n \geq 1$  dada por*

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Então, para todo  $t \geq 1$  e para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,

$$(B)^t = (b_{i,j}^t), \quad \text{onde } b_{i,j}^t = \begin{cases} \lambda^{t-(j-i)} \cdot C_t^{(j-i)} & \text{se } 0 \leq j - i \leq t \\ 0 & \text{em todos os outros casos} \end{cases} \quad (4.14)$$

**Demonstração do Lema 20.** Vamos demonstrar o lema 20 por indução. A tabela 4.1 apresenta uma ilustração para a indução feita nesta demonstração.

$t$	$n$	1	2	3	...
1		Base inicial	Passos de indução inicial em $n$		
2		Passo de indução			
3					
⋮					

Tabela 4.1: Ilustração da indução para demonstrar o lema 20

Primeiro observamos que a fórmula (4.14) para  $t = 1$  e todo  $n = 1, 2, 3, \dots$  é evidente.

Agora provaremos por indução em  $t$  a fórmula (4.14) para todo  $t$  e todo  $n$ .

**Passo de indução:** Supomos

$$b_{i,j}^t = \begin{cases} \lambda^{t-(j-i)} \cdot C_t^{(j-i)} & \text{se } 0 \leq j - i \leq t \\ 0 & \text{em todos os outros casos} \end{cases} \quad (4.15)$$

e queremos mostrar que

$$b_{i,j}^{t+1} = \begin{cases} \lambda^{(t+1)-(j-i)} \cdot C_{t+1}^{(j-i)} & \text{se } 0 \leq j - i \leq t + 1 \\ 0 & \text{em todos os outros casos.} \end{cases}$$

Lembramos que

$$b_{i,j}^{(t+1)} = \sum_{k=1}^n b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1.$$

Vamos mostrar os seguintes casos

1. Seja  $j - i = 0$ . Então queremos mostrar que  $b_{i,j}^{(t+1)} = \lambda^{(t+1)-(i-i)} \cdot C_{(t+1)}^{(i-i)} = \lambda^{(t+1)}$ .

**Demonstração do Caso 1.** Seja a seguinte tabela 4.2

Intervalo	$b_{i,k}^t$	$b_{k,i}^1$
$1 \leq k \leq i - 1 < i$	0	$b_{k,i}^1$
$k = i$	$b_{i,i}^t$	$b_{i,i}^1$
$i < i + 1 \leq k \leq n$	$b_{i,k}^t$	0

Tabela 4.2: Possíveis valores de  $b_{i,k}^t$  e  $b_{k,i}^1$  para o caso 1 em todo intervalo  $1 \leq k \leq n$ .

Observando a tabela 4.2 temos

$$\begin{aligned}
b_{i,i}^{(t+1)} &= \sum_{k=1}^n b_{i,k}^t \cdot b_{k,i}^1 = \sum_{k=1}^{i-1} b_{i,k}^t \cdot b_{k,i}^1 + b_{i,i}^t \cdot b_{i,i}^1 + \sum_{k=i+1}^n b_{i,k}^t \cdot b_{k,i}^1 = \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{k,i}^1 + b_{i,i}^t \cdot b_{i,i}^1 + \sum_{k=i+1}^n b_{i,k}^t \cdot 0 = \lambda^t \cdot \lambda = \lambda^{t+1}.
\end{aligned}$$

Portanto o Caso 1 está demonstrado.

2. Seja  $j - i < 0$ . Então  $b_{i,j}^{(t+1)} = 0$ .

**Demonstração do Caso 2.** Seja a seguinte tabela 4.3

Intervalo	$b_{i,k}^t$	$b_{k,j}^1$
$1 \leq k \leq j < i$	0	$b_{k,j}^1$
$j < j+1 \leq k \leq i$	$b_{i,k}^t$	0
$j < i < i+1 \leq k \leq n$	$b_{i,k}^t$	0

Tabela 4.3: Possíveis valores de  $b_{i,k}^t$  e  $b_{k,j}^1$  para o caso 2 em todo intervalo  $1 \leq k \leq n$ .

Observando a tabela 4.3 temos

$$\begin{aligned}
b_{i,j}^{(t+1)} &= \sum_{k=1}^n b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 = \sum_{k=1}^j b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 + \sum_{k=j+1}^i b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 + \sum_{k=i+1}^n b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 = \\
&= \sum_{k=1}^j 0 \cdot b_{k,j}^1 + \sum_{k=j+1}^i b_{i,k}^t \cdot 0 + \sum_{k=i+1}^n b_{i,k}^t \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto o Caso 2 está demonstrado.

3. Seja  $0 < j - i \leq t + 1$ . Então  $b_{i,j}^{(t+1)} = \lambda^{(t+1)-(j-i)} \cdot C_{(t+1)}^{(j-i)}$ .

**Demonstração do Caso 3.** Seja a tabela 4.4

Intervalo	$b_{i,k}^t$	$b_{k,j}^1$
$1 \leq k \leq i-1 < i < j$	0	$b_{k,j}^1$
$i \leq k \leq i+1$	$b_{i,k}^t$	$b_{k,j}^1$
$i+2 \leq k \leq j$	$b_{i,k}^t$	$b_{k,j}^1$
$i < j < j+1 \leq k \leq i+t+1$	$b_{i,k}^t$	0
$j \leq i+t+1 < i+t+2 \leq k \leq n$	$b_{i,k}^t$	0

Tabela 4.4: Possíveis valores de  $b_{i,k}^t$  e  $b_{k,j}^1$  para o caso 3 em todo intervalo  $1 \leq k \leq n$ .

Observando a tabela 4.4 temos

$$\begin{aligned}
b_{i,j}^{(t+1)} &= \sum_{k=1}^n b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 = \sum_{k=1}^{i-1} b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 + \sum_{k=i}^{i+1} b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 + \\
&+ \sum_{k=i+2}^j b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 + \sum_{k=j+1}^{i+t+1} b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 + \sum_{k=i+t+2}^n b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 = \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{k,j}^1 + \sum_{k=i}^{i+1} b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 + \sum_{k=i+2}^j b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 + \\
&+ \sum_{k=j+1}^{i+t+1} b_{i,k}^t \cdot 0 + \sum_{k=i+t+2}^n b_{i,k}^t \cdot 0 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=i}^{i+1} \lambda^{t-(k-i)} \cdot C_t^{(k-i)} \cdot \lambda^{1-(j-k)} \cdot C_1^{(j-k)} + \\
&+ \sum_{k=i+2}^j \lambda^{t-(k-i)} \cdot C_t^{(k-i)} \cdot \lambda^{1-(j-k)} \cdot C_1^{(j-k)} = \\
&= \lambda^{(t+1)-(j-i)} \sum_{k=i}^j C_t^{(k-i)} \cdot C_1^{(j-k)} = \\
&= \lambda^{(t+1)-(j-i)} \sum_{k=0}^{j-i} C_t^k \cdot C_1^{(j-i)-k} = \lambda^{(t+1)-(j-i)} C_{t+1}^{(j-i)},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade é devido ao lema 19. Portanto o Caso 3 está demonstrado.

4. Seja  $j - i > t + 1$ . Então  $b_{i,j}^{(t+1)} = 0$ .

**Demonstração do Caso 4.** Seja a tabela 4.5

Intervalo	$b_{i,k}^t$	$b_{k,j}^1$
$1 \leq k \leq i - 1 < i$	0	$b_{k,j}^1$
$i \leq k \leq i + t \implies j - i \geq j - k \geq j - i - t > t + 1 - t = 1$	$b_{i,k}^t$	0
$i + t + 1 \leq k \leq j \implies t < t + 1 \leq k - i \leq j - i$	0	$b_{k,j}^1$
$j < j + 1 \leq k \leq n$	$b_{i,k}^t$	0

Tabela 4.5: Possíveis valores de  $b_{i,k}^t$  e  $b_{k,j}^1$  para o caso 4 em todo intervalo  $1 \leq k \leq n$ .

Observando a tabela 4.5 temos

$$\begin{aligned}
b_{i,j}^{(t+1)} &= \sum_{k=1}^n b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 = \sum_{k=1}^{i-1} b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 + \sum_{k=i}^{i+t} b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 + \\
&+ \sum_{k=i+t+1}^j b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 + \sum_{k=j+1}^n b_{i,k}^t \cdot b_{k,j}^1 = \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{k,j}^1 + \sum_{k=i}^{i+t} b_{i,k}^t \cdot 0 + \sum_{k=i+t+1}^j 0 \cdot b_{k,j}^1 + \sum_{k=j+1}^n b_{i,k}^t \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto o Caso 4 está demonstrado. Assim, o lema 20 está demonstrado.

**Lema 21.** *Sejam a matriz  $J$  de Jordan definida em (4.6) e o vetor  $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ . Supomos  $\lambda_{dom} > |\lambda_1|, \dots, \lambda_{dom} > |\lambda_{n-1}|$ .*

- *Seja a coordenada  $e_1 > 0$ . Então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{J^t \cdot e}{\|J^t \cdot e\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

- *Seja a coordenada  $e_1 < 0$ . Então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{J^t \cdot e}{\|J^t \cdot e\|} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Antes de demonstrar o lema 21 provaremos os seguintes lemas.

**Lema 22.** *Para todas as constantes positivas  $c_1, c_2$  onde  $c_2 < 1$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{c_1} \cdot c_2^t = 0. \quad (4.18)$$

**Demonstração do Lema 22.** É suficiente supor que  $c_1$  é uma constante inteira e positiva. Aplicando a regra de L'Hospital ao limite (4.18)  $c_1$  vezes sucessivas obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{c_1} \cdot c_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{c_1} \cdot c_2^t \cdot c_2^{-t}}{c_2^{-t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{c_1}}{c_2^{-t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_1!}{c_2^{-t} (\ln(c_2))^{c_1}} = 0.$$

Portanto, o lema 22 está demonstrado.

**Lema 23.** Sejam  $c \in (0, 1)$ ,  $n > 0$ , e  $\mathcal{P}(t)$  um polinômio em  $t$  de coeficientes reais. Sejam  $z_0, \dots, z_n$ , números complexos. Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c^t \cdot \left| \sum_{j=0}^n z_j \cdot \mathcal{P}(t) \right| = 0.$$

**Demonstração do Lema 23.** Suponhamos que o polinômio  $\mathcal{P}(t)$  tenha grau  $j$ .

Temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c^t \cdot \left| \sum_{j=0}^n z_j \cdot \mathcal{P}(t) \right| \leq \sum_{j=0}^n \lim_{t \rightarrow \infty} c^t \cdot |z_j| \cdot |\mathcal{P}(t)|.$$

Como  $0 < c < 1$  e  $\mathcal{P}(t)$  é um polinômio em  $t$  de grau  $j$ , temos pelo lema 22, para todo  $j = 0, \dots, n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c^t \cdot |z_j| \cdot |\mathcal{P}(t)| = 0. \quad (4.19)$$

Assim por (4.19), o lema 23 está demonstrado.

**Lema 24.** Sejam  $\mathcal{P}(t)$  um polinômio em  $t$  de coeficientes reais e uma constante  $c > 1$ . Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}(t)}{c^t} = 0. \quad (4.20)$$



**Demonstração do Lema 24.** Suponhamos que o polinômio  $\mathcal{P}(t)$  tenha grau  $j$ .

Observe que podemos provar por indução sobre  $k$ , que a  $k$ -ésima derivada da função  $c^t$  é

$$c^t(\ln(c))^k.$$

Aplicando a regra de L'Hospital ao limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}(t)}{c^t}$$

$j$  vezes sucessivas obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}(t)}{c^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a}{c^t(\ln(c))^j} = 0,$$

onde  $a$  é uma constante real. Portanto, o lema 24 está demonstrado.

Agora estamos prontos para demonstrar o lema 21.

**Demonstração do Lema 21.** Evidentemente, para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,

$$(J^t)_{i,j} = \begin{cases} \lambda_{dom}^t & \text{se } i = j = 1 \\ (B_1)_{i,j}^t & \text{se } i, j = 2, \dots, n_1 \\ (B_2)_{i,j}^t & \text{se } i, j = n_1 + 1, \dots, n_2 \\ \dots & \dots \\ (B_k)_{i,j}^t & \text{se } i, j = n_{k-1} + 1, \dots, n_k \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

onde  $n_k$  foram definidos em (4.7).

Tomemos qualquer vetor  $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ . Então, usando (4.14), obtemos para todo

$i = 1, \dots, n :$

$$(J^t \cdot e)_i = \begin{cases} \lambda_{dom}^t \cdot e_1 & \text{se } i = 1 \\ \sum_{j=0}^{n_1-i} \lambda_1^{t-j} \cdot e_{j+i} \cdot C_t^j & \text{se } i = 2, \dots, n_1 \\ \sum_{j=0}^{n_2-i} \lambda_2^{t-j} \cdot e_{j+i} \cdot C_t^j & \text{se } i = n_1 + 1, \dots, n_2 \\ \dots & \dots \\ \sum_{j=0}^{n_k-i} \lambda_k^{t-j} \cdot e_{j+i} \cdot C_t^j & \text{se } i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k \end{cases}$$

e

$$\|J^t \cdot e\| = \lambda_{dom}^t \cdot |e_1| + \sum_{x=1}^k |\lambda_x^t| \sum_{i=n_{x-1}+1}^{n_x} \left| \sum_{j=0}^{n_x-i} \lambda_x^{-j} \cdot e_{j+i} \cdot C_t^j \right|.$$

Vamos dividir a afirmação do lema 21 em duas partes:

**Parte 1.** Vamos dividir esta parte em dois casos:

- Seja a primeira coordenada do vetor  $e$  positiva. Então a primeira coordenada do limite (4.16) é um, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(J^t \cdot e)_1}{\|J^t \cdot e\|} = 1;$$

- Seja a primeira coordenada do vetor  $e$  negativa. Então a primeira coordenada do limite (4.17) é menos um, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(J^t \cdot e)_1}{\|J^t \cdot e\|} = -1;$$

**Parte 2.** As demais coordenadas dos limites (4.16) e (4.17) são zero, isto é, para todo  $i = 2, \dots, n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(J^t \cdot e)_i}{\|J^t \cdot e\|} = 0.$$

## Demonstração da Parte 1. Representamos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(J^t \cdot e)_1}{\|J^t \cdot e\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{dom}^t \cdot e_1}{\lambda_{dom}^t \cdot |e_1| + S_t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e_1}{|e_1| + \frac{S_t}{\lambda_{dom}^t}},$$

onde denotamos

$$S_t = \sum_{x=1}^k |\lambda_x^t| \sum_{i=n_{x-1}+1}^{n_x} \left| \sum_{j=0}^{n_x-i} \lambda_x^{-j} \cdot e_{j+i} \cdot C_t^j \right|. \quad (4.21)$$

É suficiente mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t}{\lambda_{dom}^t} = 0.$$

De nossa definição de  $S_t$  temos,

$$\frac{S_t}{\lambda_{dom}^t} = \sum_{x=1}^k \sum_{i=n_{x-1}+1}^{n_x} \left( \frac{|\lambda_x|}{\lambda_{dom}} \right)^t \left| \sum_{j=0}^{n_x-i} \lambda_x^{-j} \cdot e_{j+i} \cdot C_t^j \right|.$$

Como para todo  $x = 1, \dots, k$  e todo  $i = n_{x-1} + 1 \dots, n_x$ ,  $\lambda_{dom} > |\lambda_x|$  e  $C_t^j$  é um polinômio em  $t$  de grau  $j$ , podemos aplicar o lema 23, com  $c = \frac{|\lambda_x|}{\lambda_{dom}}$ ,  $z_j = \lambda_x^{-j} \cdot e_{j+i}$  e  $\mathcal{P}(t) = C_t^j$ . Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t}{\lambda_{dom}^t} = 0. \quad (4.22)$$

Desta forma

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(J^t \cdot e)_1}{\|J^t \cdot e\|} = \frac{e_1}{|e_1|}.$$

No caso em que a coordenada  $e_1$  é positiva, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(J^t \cdot e)_1}{\|J^t \cdot e\|} = 1.$$

No entanto, no caso em que a coordenada  $e_1$  é negativa, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(J^t \cdot e)_1}{\|J^t \cdot e\|} = -1.$$

Assim a Parte 1 está demonstrada.

**Demonstração da Parte 2.** Queremos mostrar que, para todo  $y \in \{1, \dots, k\}$  e  $i \in \{n_{y-1} + 1, \dots, n_y\}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_y^t \sum_{j=0}^{n_y-i} \lambda_y^{-j} \cdot e_{j+i} \cdot C_t^j}{\lambda_{dom}^t \cdot |e_1| + S_t} = 0,$$

onde  $S_t$  foi definido em (4.21).

Vamos dividir a demonstração desta parte em dois casos:  $\lambda_y = 0$  e  $\lambda_y \neq 0$ . Seja, primeiro,  $\lambda_y = 0$ . Neste caso,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{0}{\lambda_{dom}^t \cdot |e_1| + S_t} = 0.$$

Seja agora  $\lambda_y \neq 0$ . Inicialmente, vamos estimar o limite

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left| \lambda_y^t \sum_{j=0}^{n_y-i} \lambda_y^{-j} \cdot e_{j+i} \cdot C_t^j \right|}{\lambda_{dom}^t \cdot |e_1| + S_t} &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_y^t| \left| \sum_{j=0}^{n_y-i} \lambda_y^{-j} \cdot e_{j+i} \cdot C_t^j \right|}{\lambda_{dom}^t \cdot |e_1|} \leq \\
&\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_y^t| \sum_{j=0}^{n_y-i} |\lambda_y^{-j} \cdot e_{j+i}| C_t^j}{\lambda_{dom}^t \cdot |e_1|} = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{n_y-i} |\lambda_y^{-j} \cdot e_{j+i}| C_t^j}{\left( \frac{\lambda_{dom}}{|\lambda_y|} \right)^t \cdot |e_1|}.
\end{aligned}$$

Como  $C_t^j$  é um polinômio em  $t$  de grau  $j$  com coeficientes reais e  $\lambda_{dom} > |\lambda_y|$ , temos pelo lema 24,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{n_y-i} |\lambda_y^{-j} \cdot e_{j+i}| C_t^j}{\left( \frac{\lambda_{dom}}{|\lambda_y|} \right)^t \cdot |e_1|} = 0. \quad (4.23)$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|(J^t \cdot e)_i|}{\|J^t \cdot e\|} = 0.$$

*Assim a Parte 2 está demonstrada. Portanto, o lema 21 está demonstrado.*

**Lema 25.** *Sejam as matrizes  $J$ ,  $M_0$  e a matriz invertível  $T$  com inversa  $T^{-1}$ , tais que  $M_0 = T \cdot J \cdot T^{-1}$ . Se o vetor  $v$  é autovetor generalizado de  $J$  associado ao autovalor  $\lambda$ , então o vetor*

$$w = T \cdot v$$

é autovetor generalizado de  $M_0$  com o mesmo autovalor  $\lambda$ .

**Demonstração do Lema 25.** Seja o vetor  $v$  autovetor generalizado de  $J$  associado ao autovalor  $\lambda$ . Então, existe  $k > 0$ , tal que

$$(J - \lambda I)^k \cdot v = \bar{0},$$

onde  $I$  é a matriz identidade e  $\bar{0}$  é o vetor nulo, ambos com a mesma ordem da matriz  $J$ .

Queremos mostrar que

$$(M_0 - \lambda I)^k (T \cdot v) = \bar{0}.$$

Observe que

$$T \cdot J = M_0 \cdot T.$$

Logo

$$(M_0 - \lambda I)^k = T (J - \lambda I)^k T^{-1}$$

$\Downarrow$

$$(M_0 - \lambda I)^k (T \cdot v) = T (J - \lambda I)^k T^{-1} (T \cdot v) = T (J - \lambda I)^k \cdot v = T \cdot \bar{0} = \bar{0}.$$

Portanto, o lema 25 está demonstrado.

Sejam uma aplicação  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  e  $t \in \mathbb{N}$ . Chamamos  $f^t$  a  $t$ -ésima iterada de  $f$ , ou seja,  $f^2 = f \circ f$ ,  $\dots$ ,  $f^t = f \circ f^{t-1}$ , onde  $\circ$  é a operação de composição.

**Lema 26.** *Seja o operador linear  $M_0 : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ , cuja representação matricial foi definida em (1.16). Então*

$$\forall d \in D : \quad \text{Norm} (M_0^t d) = (\text{Norm} \circ M_0)^t d,$$

onde  $(\text{Norm} \circ M_0)$  é a composição do operador  $\text{Norm}$  com o operador  $M_0$ , ou seja,  $(\text{Norm} \circ M_0) d = \left( \text{Norm} (M_0 d) \right)$ .

**Demonstração do Lema 26.** Vamos mostrar por indução.

**Base de indução:**  $Norm(M_0 d) = (Norm \circ M_0) d$  pela definição de composição do operador  $Norm$  com o operador  $M_0$ .

**Passo de indução:**

Seja  $Norm(M_0^t d) = (Norm \circ M_0)^t d$ . Queremos mostrar que

$$Norm(M_0^{t+1} d) = (Norm \circ M_0)^{t+1} d.$$

Seja  $\|M_0^t d\| = a$ . Assim,

$$M_0 \left( Norm(M_0^t d) \right) = M_0 \frac{M_0^t d}{\|M_0^t d\|} = M_0 \frac{M_0^t d}{a} = \frac{1}{a} M_0 (M_0^t d) = \frac{1}{a} M_0^{t+1} d,$$

onde a penúltima igualdade é devido ao fato de  $M_0$  ser linear.

Pelo lema 16

$$Norm \left( \frac{1}{a} M_0^{t+1} d \right) = Norm(M_0^{t+1} d).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} Norm(M_0^{t+1} d) &= Norm \left( M_0 (Norm(M_0^t d)) \right) = \\ &= Norm \left( M_0 (Norm \circ M_0)^t d \right) = (Norm \circ M_0)^{t+1} d. \end{aligned}$$

Portanto, o lema 26 está demonstrado.

**Lema 27.** Seja a matriz  $M_0$ , definida em (1.16) primitiva. Sejam  $\lambda_{dom}$  o autovalor dominante de  $M_0$  e  $d_{dom} \in D^+$  o autovetor de  $M_0$  associado a  $\lambda_{dom}$ . Então para todo  $d \in D^+$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_0^t \cdot d}{\lambda_{dom}^t} = a \cdot d_{dom},$$

onde  $a$  é uma constante positiva.

**Demonstração do lema 27.** Pelo lema 17, o autovetor  $d_{dom} \in D^+$  é o único autovetor de  $M_0$  associado a  $\lambda_{dom}$  em  $D$ .

Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os autovalores de  $M_0$  incluindo  $\lambda_{dom} = \lambda_1$ . Como  $\lambda_{dom}$  é o autovalor dominante e  $M_0$  é primitiva,

$$\lambda_{dom} > |\lambda_2|, \dots, \lambda_{dom} > |\lambda_n|.$$

Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  os autovalores distintos de  $M_0$ .

Denotamos o polinômio característico de  $M_0$  por

$$\det(M_0 - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{s_k}. \quad (4.24)$$

Denotamos o polinômio mínimo de  $M_0$  por

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}.$$

Para todo  $i = 1, \dots, k$ , denotamos de  $W_i$  o núcleo de  $(M_0 - \lambda_i I)^{r_i}$ . Em outras palavras,

$$W_i = \ker [(M_0 - \lambda_i I)^{r_i}] = \{v \in \mathbb{C}^n : (M_0 - \lambda_i I)^{r_i} v = \bar{0}\},$$

onde  $\bar{0}$  é o vetor nulo.

Assim, pelo teorema auxiliar 7 (Teorema da Decomposição Primária), na página 53 e pelo teorema auxiliar 9 na página 55,  $M_0(W_i) \subset W_i$  e  $\dim(W_i) = s_i$ , onde  $\dim$  foi definido em (4.8) na página 55 e  $s_i$  é o mesmo que em (4.24).

Então, pelo teorema auxiliar 7 (Teorema da Decomposição Primária), podemos apresentar  $\mathbb{C}^n$  como

$$\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k.$$



Denotamos por  $M_{0i}$  o operador em  $W_i$  induzido pela restrição de  $M_0$  a  $W_i$  :

$$M_{0i} : W_i \rightarrow W_i.$$

Denotamos o polinômio mínimo de  $M_{0i}$  por

$$m_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{r_i}.$$

Pelo teorema auxiliar 10 (Teorema da Decomposição Cíclica), na página 56, existem vetores  $v_1, \dots, v_{x_i} \in W_i$  tais que

$$W_i = \ker [(M_0 - \lambda_i I)^{r_i}] = Z(v_1, M_{0i}) \oplus Z(v_2, M_{0i}) \oplus \dots \oplus Z(v_{x_i}, M_{0i}),$$

e

$$\text{grau}(\lambda - \lambda_i)^{r_i} = \dim(Z(v_1, M_{0i})) \geq \dots \geq \dim(Z(v_{x_i}, M_{0i})),$$

onde *grau* e *dim* foram definidos em (4.8) na página 55.

Para todo autovetor generalizado  $v \in \mathbb{C}^n$  associado ao autovalor  $\lambda$  do operador  $M_0$ , seja  $p$  o menor inteiro tal que  $(M_0 - \lambda I)^p v = \bar{0}$ . Para um mesmo vetor  $v$ , definimos o conjunto

$$\mathcal{C}_{(v)} = \left\{ v, (M_0 - \lambda I)v, (M_0 - \lambda I)^2 v, \dots, (M_0 - \lambda I)^{p-1} v \right\}.$$

Todos os elementos do conjunto  $\mathcal{C}_{(v)}$  são autovetores generalizados do operador  $M_0$  associados ao mesmo autovalor  $\lambda$ .

Denotamos

$$\mathcal{B}_i = \bigcup_{j=1}^{x_i} \mathcal{C}_{(v_j)}. \quad (4.25)$$

Pelo teorema auxiliar 8, o conjunto  $\mathcal{B}_i$  é uma base de  $W_i$ . Então pela definição 38 na página 56 o conjunto  $\mathcal{B}_i$  é a base de Jordan do subespaço  $W_i$ .

O conjunto

$$\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{B}_j,$$

é uma base para o espaço  $\mathbb{C}^n$  tal que a matriz  $M_0$  é semelhante a uma matriz em forma canônica de Jordan, denotada por  $J$  (ver definição 33), nesta base.

Sem perda de generalidade, suponhamos que para todo  $i = 1, \dots, k$ ,

$$\mathcal{B}_i = \left\{ v_i, (M_0 - \lambda_i I) v_i, (M_0 - \lambda_i I)^2 v_i, \dots, (M_0 - \lambda_i I)^{s_i-1} v_i \right\}$$

é uma base do subespaço  $W_i$ .

Denotamos por  $A_i$  a matriz de ordem  $s_i \geq 1$  do operador  $M_{0i}$  na base  $\mathcal{B}_i$ .

Logo,

$$A_i = \begin{pmatrix} B_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{i,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{i,3} & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{i,x_i} \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

onde para todo  $y = 1, \dots, x_i$ ,

$$B_{i,y} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Para todo  $y = 1, \dots, x_i$ , os blocos  $B_{i,y}$  podem ter ordens distintas.

Relembramos que  $\lambda_1 = \lambda_{dom}$ . Como  $M_0$  é primitiva,  $\mathcal{B}_1$  tem apenas um elemento,

$$\mathcal{B}_1 = \{w_1\}, \quad (4.27)$$

onde  $w_1 = d_{dom}$  é o autovetor dominante de  $M_0$  associado ao autovalor dominante  $\lambda_{dom}$  em  $D$ .

Tomemos qualquer  $w_i \in W_i$ . Podemos escrever

$$w_i = \sum_{j=1}^{s_i} a_{i,j} (M_0 - \lambda_i I)^{j-1} v_i.$$

Portanto

$$M_0^t w_i = \sum_{j=1}^{s_i} a_{i,j} M_0^t (M_0 - \lambda_i I)^{j-1} v_i.$$

Sabemos que a matriz  $M_0$  é semelhante a uma matriz em forma canônica de Jordan na base  $\mathcal{B}$ , denotada por  $J$ . Assim, podemos reescrever

$$M_0^t = T \cdot J^t \cdot T^{-1},$$

onde  $T$  é uma matriz invertível e  $T^{-1}$  sua inversa.

Desta forma,

$$\begin{aligned} M_0^t w_i &= \sum_{j=1}^{s_i} a_{i,j} \cdot T \cdot J^t \cdot T^{-1} T (J - \lambda_i I)^{j-1} T^{-1} \cdot v_i = \\ &= \sum_{j=1}^{s_i} a_{i,j} \cdot T \cdot J^t (J - \lambda_i I)^{j-1} T^{-1} \cdot v_i = \\ &= \sum_{j=1}^{s_i} a_{i,j} \cdot T \cdot A_i^t (A_i - \lambda_i I)^{j-1} T^{-1} \cdot v_i, \end{aligned}$$

onde a matriz  $A_i$  é a matriz definida em (4.26) expandida com ordem  $n$ , ou seja, completada com zeros.

Para todo  $j = 1, \dots, s_i$

$$A_i^t (A_i - \lambda_i I)^{j-1} = \begin{pmatrix} (B_{i,1})^t (B_{i,1} - \lambda_i I)^{j-1} & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & (B_{i,x_i})^t (B_{i,x_i} - \lambda_i I)^{j-1} & \end{pmatrix},$$

onde para todo  $y = 1, \dots, x_i$ ,

$$B_{i,y} - \lambda_i I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para todo  $i = 2, \dots, k$ , vamos agora calcular o seguinte limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_0^t w_i}{\lambda_{dom}^t} = \sum_{j=1}^{s_i} a_{i,j} \cdot T \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_i^t (A_i - \lambda_i I)^{j-1} T^{-1} \cdot v_i}{\lambda_{dom}^t}.$$

Da fórmula (4.14) apresentada na página 59 temos que para todo  $t \geq 1$  e para todo  $y = 1, \dots, x_i$  os elementos de cada bloco  $(B_{i,y})^t$  da matriz  $A_i^t$  apresentam-se da seguinte forma, para todos  $x, z = 1, \dots, s_i$ ,

$$(B_{i,y})_{x,z}^t = \begin{cases} \lambda_i^{t-(z-x)} \cdot C_t^{(z-x)} & \text{se } 0 \leq z - x \leq t \\ 0 & \text{em todos os outros casos} \end{cases} \quad (4.28)$$

Tomemos qualquer  $t \geq 1$  e quaisquer  $x, z = 1, \dots, s_i$ . Para todo  $i = 2, \dots, k$ ,  $\lambda_{dom} > |\lambda_i|$ . Logo, pelo lema 24

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_i^{t-(z-x)}| \cdot C_t^{(z-x)}}{\lambda_{dom}^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{|\lambda_i|}{\lambda_{dom}} \right)^t \cdot |\lambda_i^{-(z-x)}| \cdot C_t^{(z-x)} = 0. \quad (4.29)$$

Desta forma, por (4.29) temos, para todo  $i = 2, \dots, k$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_0^t w_i}{\lambda_{dom}^t} = \bar{0}. \quad (4.30)$$

Para todo  $i = 1, \dots, k$ , seja o conjunto  $\mathcal{B}_i$  definido em (4.25). Então o conjunto  $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$  é uma base em  $\mathbb{C}^n$ . Assim para todo  $d \in D^+$  podemos escrever

$$d = a_{11} \cdot d_{dom} + \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{s_i} a_{i,j} \cdot (M_0 - \lambda_i I)^{j-1} v_i, \quad (4.31)$$

onde  $\mathcal{B}_1$  foi definido em (4.27) na página 76.

Portanto

$$\begin{aligned} M_0^t d &= a_{11} \cdot M_0^t \cdot d_{dom} + \sum_{i=2}^k M_0^t \sum_{j=1}^{s_i} a_{i,j} \cdot (M_0 - \lambda_i I)^{j-1} \cdot v_i = \\ &= a_{11} \cdot \lambda_{dom}^t \cdot d_{dom} + \sum_{i=2}^k M_0^t \sum_{j=1}^{s_i} a_{i,j} \cdot (M_0 - \lambda_i I)^{j-1} \cdot v_i. \end{aligned}$$

Assim, por (4.30)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_0^t d}{\lambda_{dom}^t} = a_{11} d_{dom} + \sum_{i=2}^k \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_0^t \sum_{j=1}^{s_i} a_{i,j} (M_0 - \lambda_i I)^{j-1} v_i}{\lambda_{dom}^t} = a_{11} d_{dom}. \quad (4.32)$$

Primeiro vamos mostrar que a constante  $a_{11} \geq 0$ , em seguida vamos mostrar que  $a_{11} > 0$ .

Como a matriz  $M_0$  é primitiva, então, pelo teorema auxiliar 4, existe uma potência de  $M_0$  tal que ela é positiva, ou seja, existe  $u$  tal que  $M_0^u > 0$ . Então para todo  $t \geq u$  o vetor

$$\frac{M_0^t d}{\lambda_{dom}^t}$$

tem coordenadas positivas na base original, para todo  $d \in D^+$ . Desta forma, como  $d_{dom} \in D^+$ , temos que  $a_{11} \geq 0$  na fórmula (4.32).

Agora vamos provar que  $a_{11} > 0$ .

Seja um vetor  $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in D^+$ . Seja  $d_{dom} = \begin{pmatrix} d_{dom_1} \\ \vdots \\ d_{dom_n} \end{pmatrix} \in D$  o autovetor dominante da matriz  $M_0$  associado ao autovalor dominante  $\lambda_{dom}$  em  $D$ . Pelo teorema auxiliar 3 (Frobenius) enunciado na página 48, para todo  $i = 1, \dots, n$ , todas as coordenadas  $d_{dom_i} > 0$ . Logo, podemos definir,

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{d_1}{d_{dom_1}}, \dots, \frac{d_n}{d_{dom_n}} \right\}, \quad (4.33)$$

onde  $\min\{.\}$  é o menor valor do conjunto  $\{.\}$ .

Por (4.33), para todo  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \frac{d_j}{d_{dom_j}} \\ &\Downarrow \\ \varepsilon \cdot d_{dom_j} &\leq d_j \\ &\Downarrow \\ \varepsilon \cdot d_{dom} &\leq d. \end{aligned}$$

Por (4.31),

$$d = a_{11}d_{dom} + \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{s_i} a_{i,j} (M_0 - \lambda_i I)^{j-1} v_i \geq \varepsilon \cdot d_{dom}.$$

Assim, por (4.32)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_0^t d}{\lambda_{dom}^t} = a_{11} d_{dom} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \cdot M_0^t d_{dom}}{\lambda_{dom}^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \cdot \lambda_{dom}^t d_{dom}}{\lambda_{dom}^t} = \varepsilon \cdot d_{dom}. \quad (4.34)$$

Logo, devido a (4.34)

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot d_{dom} &\geq \varepsilon \cdot d_{dom} \\ &\Downarrow \\ a_{11} &\geq \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Portanto, o lema 27 está demonstrado.

Agora estamos prontos para demonstrar o teorema 5, enunciado na página 56.

**Demonstração do Teorema 5.** Como  $M_0$  é primitiva, pelo teorema auxiliar 3 existe  $\lambda_{dom}$ . Pelo lema 17, existe um único autovetor de  $M_0$  em  $D$ ,  $d_{dom} \in D^+$ , associado a  $\lambda_{dom}$ . Pelo lema 18,  $d_{dom}$  é ponto fixo da aplicação  $\tilde{M}$ .

Assim, sejam  $\lambda_{dom}, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  os autovalores de  $M_0$ . Logo

$$\lambda_{dom} > |\lambda_2|, \dots, \lambda_{dom} > |\lambda_n|.$$

Sejam  $d \in D^+$  e o conjunto

$$\mathcal{B} = \{d_{dom}, w_2, \dots, w_n\}$$

uma base do espaço  $\mathbb{C}^n$ , tal que a matriz  $M_0$  seja semelhante a uma matriz em forma canônica de Jordan, denotada por  $J$ , nesta base, ou seja,

$$M_0 = T \cdot J \cdot T^{-1}, \quad (4.35)$$

onde  $T$  é uma matriz invertível e  $T^{-1}$  sua inversa.

Logo, para todo  $t > 0$ ,

$$M_0^t = T \cdot J^t \cdot T^{-1}.$$

A matriz  $J$  de Jordan foi definida em (4.6) na página 52.

Assim para todo  $d \in D^+$ , podemos escrever

$$d = b_1 \cdot d_{dom} + \sum_{i=2}^n b_i \cdot w_i. \quad (4.36)$$

Para todo  $d \in D^+$ , denotamos as coordenadas do vetor  $d$  na base  $\mathcal{B}$  por

$$[d]_{\mathcal{B}} = T^{-1} \cdot d,$$

onde a matriz  $T$  é a mesma usada em (4.35).

Desta forma, por (4.36)

$$[d]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Norm} (M_0^t d) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Norm} (T \cdot J^t \cdot T^{-1} T \cdot [d]_{\mathcal{B}}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Norm} (T \cdot J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}).$$

Vamos mostrar agora que

$$\text{Norm} (T \cdot J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}) = \text{Norm} (T \cdot \text{Norm} (J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}})).$$



É fácil ver que  $\|J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}\| \neq 0$ , assim

$$\begin{aligned} Norm(T \cdot J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}) &= \frac{T \cdot J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}}{\|T \cdot J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}\|} = \frac{\frac{T \cdot J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}}{\|J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}\|}}{\frac{\|T \cdot J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}\|}{\|J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}\|}} = \frac{\frac{T \cdot J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}}{\|J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}\|}}{\left\| \frac{T \cdot J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}}{\|J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}\|} \right\|} = \\ &= Norm\left(\frac{T \cdot J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}}{\|J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}\|}\right) = Norm(T \cdot Norm(J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}})). \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Norm(T \cdot J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}) = \lim_{t \rightarrow \infty} Norm(T \cdot Norm(J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}})).$$

Pelo lema 27,  $b_1 > 0$ , logo

$$[d]_{\mathcal{B}} \neq \delta_0.$$

Assim

$$J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}} \neq \delta_0,$$

pois  $\lambda_{dom} > 0$ . Portanto, como a aplicação  $Norm$  é contínua, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Norm(T \cdot Norm(J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}})) = Norm\left(T \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} Norm(J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}})\right).$$

Pelo lema 21,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Norm(J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$Norm\left(T \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} Norm(J^t \cdot [d]_{\mathcal{B}})\right) = Norm\left(T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Portanto, pelo lema 25, aplicando a mudança de base,

$$d_{dom} = T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Desta forma

$$Norm \left( T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) = Norm(d_{dom}) = d_{dom},$$

onde a última igualdade é devido ao fato de que  $d_{dom} \in D^+$ .

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Norm(M_0^t d) = d_{dom}.$$

Pelo lema 26

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d = \lim_{t \rightarrow \infty} (Norm \circ M_0)^t d = \lim_{t \rightarrow \infty} Norm(M_0^t d).$$

Portanto, o teorema 5 está demonstrado.

Assim, provamos que o sistema dinâmico resultante tem um único ponto fixo e tende para ele para todo vetor inicial em  $D^+$  quando o tempo tende para o infinito.

# Capítulo 5

## Exemplos

Neste capítulo, apresentamos alguns exemplos utilizando os nossos resultados teóricos.

**Exemplo 1.** *Seja  $n = 3$ , isto é, consideremos um sistema com três tipos de partículas.*

Denotamos  $r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Seja  $p \in (0, 1)$ . Sejam as seguintes probabilidades de transição positivas:

$\theta_{1,r} = p$ ,  $\theta_{1,u} = 1 - p$ ,  $\theta_{2,s} = p$ ,  $\theta_{2,r} = 1 - p$ ,  $\theta_{3,u} = p$ , e  $\theta_{3,s} = 1 - p$ .

Assim,

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{pmatrix}.$$

$M_0$  é primitiva pois

$$(M_0)^2 = \begin{pmatrix} (1-p)^2 & p^2 & 2p(1-p) \\ 2p(1-p) & (1-p)^2 & p^2 \\ p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz  $M_0$  são:

$$\lambda_{dom} = \lambda_1 = 1;$$

$$\lambda_2 = \frac{2 - 3p}{2} - \frac{\sqrt{3}pi}{2};$$

$$\lambda_3 = \frac{2 - 3p}{2} + \frac{\sqrt{3}pi}{2}.$$

Temos

$$|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{1 - 3p + 3p^2}.$$

Como  $p \in (0, 1)$ , logo  $\lambda_{dom} > |\lambda_2| = |\lambda_3|$ .

Portanto  $M_0$  possui único autovalor dominante.

Os autovetores de  $M_0$  associados ao autovalor dominante  $\lambda_{dom}$  são todos os vetores

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

tais que  $v_1 = v_2 = v_3$ .

Desta forma, temos como único autovetor dominante no conjunto  $D^+$ , definido em (1.7) na página 11, associado ao autovalor  $\lambda_{dom}$ , o vetor

$$d_{dom} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Os autovetores de  $M_0$  associados ao autovalor  $\lambda_2$  são todos os vetores

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

tais que

$$c_2 = \left( \frac{2}{-1 - i\sqrt{3}} \right) c_1 \quad e \quad c_3 = \left( \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right) c_1.$$

Os autovetores de  $M_0$  associados ao autovalor  $\lambda_3$  são todos os vetores

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

tais que

$$c_2 = \left( \frac{2}{-1 + i\sqrt{3}} \right) c_1 \quad e \quad c_3 = \left( \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) c_1.$$

Vamos mostrar agora que os nossos resultados são verdadeiros para este sistema, isto é, seja o operador  $\tilde{M}$  definido em (1.18) na página 18; então, para todo  $d \in D^+$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Seja a seguinte base de autovetores de  $\mathbb{C}^3$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Portanto,  $\forall d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \in D^+$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{-1 - i\sqrt{3}} \\ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{-1 + i\sqrt{3}} \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

onde

$$a_1 = d_1 + d_2 + d_3 = 1, \quad \text{pois } d \in D^+;$$

$$a_2 = \frac{(-8i\sqrt{3})d_1 + (4i\sqrt{3} - 12)d_2 + (4i\sqrt{3} + 12)d_3}{-72i} \quad e$$

$$a_3 = \frac{(-8i\sqrt{3})d_1 + (4i\sqrt{3} + 12)d_2 + (4i\sqrt{3} - 12)d_3}{-24i\sqrt{3}}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} M_0 d &= M_0 \left( a_1 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{-1 - i\sqrt{3}} \\ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{-1 + i\sqrt{3}} \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right) = \\ &= a_1 M_0 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + a_2 M_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{-1 - i\sqrt{3}} \\ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + a_3 M_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{-1 + i\sqrt{3}} \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= a_1 \lambda_{dom} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + a_2 \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{-1 - i\sqrt{3}} \\ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + a_3 \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{-1 + i\sqrt{3}} \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

↓

$$M_0^t d = a_1 \lambda_{dom}^t \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + a_2 \lambda_2^t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{-1 - i\sqrt{3}} \\ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + a_3 \lambda_3^t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{-1 + i\sqrt{3}} \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_0^t d}{\lambda_{dom}^t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} a_1 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \lim_{t \rightarrow \infty} a_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_{dom}} \right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{-1 - i\sqrt{3}} \\ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \\ &+ \lim_{t \rightarrow \infty} a_3 \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_{dom}} \right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{-1 + i\sqrt{3}} \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como  $\lambda_{dom} > |\lambda_2|$  e  $\lambda_{dom} > |\lambda_3|$ , temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{|\lambda_2|}{\lambda_{dom}} \right)^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{|\lambda_3|}{\lambda_{dom}} \right)^t = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_0^t d}{\lambda_{dom}^t} = a_1 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz  $M_0$  é primitiva, pelo teorema 4, existe uma potência de  $M_0$  tal que ela é positiva, ou seja, existe  $x$  tal que  $M_0^x > 0$ . Então para todo  $t \geq x$  os vetores  $\frac{M_0^t d}{\lambda_{dom}^t}$  e  $M_0^t d$  têm coordenadas positivas, para todo  $d \in D^+$ .

Assim, para todo  $t \geq x$ , os vetores de coordenadas positivas  $\frac{M_0^t d}{\lambda_{dom}^t}$  e  $M_0^t d$  são colineares. Logo pelo lema 16,

$$Norm \left( \frac{M_0^t d}{\lambda_{dom}^t} \right) = Norm (M_0^t d).$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d = \lim_{t \rightarrow \infty} Norm (M_0^t d) = \lim_{t \rightarrow \infty} Norm \left( \frac{M_0^t d}{\lambda_{dom}^t} \right).$$

A aplicação  $Norm$  é contínua em  $\mathbb{R}^n - \{\delta_0\}$ . Logo, para todo  $t \geq x$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Norm \left( \frac{M_0^t d}{\lambda_{dom}^t} \right) = Norm \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_0^t d}{\lambda_{dom}^t} \right) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 2.** Consideremos neste exemplo um outro sistema com três tipos de partículas.

$$\text{Denotemos } r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos neste caso as seguintes probabilidades de transição positivas:

$$\theta_{1,r} = 1/2, \quad \theta_{1,s} = 1/2, \quad \theta_{2,s} = 1/2, \quad \theta_{2,u} = 1/2, \quad \text{e} \quad \theta_{3,u} = 1.$$



Assim,

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$M_0^t = \begin{pmatrix} (1/2)^t & 0 & 0 \\ t(1/2)^t & (1/2)^t & 0 \\ (2^t - 1 - t)(1/2)^t & (2^t - 1)(1/2)^t & 1^t \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Os autovalores da matriz  $M_0$  são:

$$\lambda_0 = \lambda_{dom} = 1;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2;$$

onde  $\lambda_{dom}$  é o autovalor dominante.

Os autovetores de  $M_0$  associados ao autovalor  $\lambda_{dom}$  são todos os vetores

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

tais que  $v_1 = v_2 = 0$ .

Neste exemplo, a matriz  $M_0$  não é primitiva, no entanto, possui um único autovalor dominante e um único autovetor de coordenadas não negativas, no conjunto  $D$ , associado ao autovalor dominante denotado por  $d_{dom}$ .

Desta forma temos

$$d_{dom} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Os autovetores de  $M_0$  associados aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são todos os vetores

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

tais que  $c_1 = 0$  e  $c_2 = -c_3$ .

Vamos mostrar que para todo  $d \in D$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d = d_{dom}$ , onde  $d_{dom}$  foi definido em (5.2) e a aplicação  $\tilde{M}$  foi definida em (1.18) na página 18.

Seja a matriz  $M_0$  definida em (5.1).

Assim, para todo  $d \in D$ ,

$$Norm(M_0^t d) = \begin{pmatrix} d_1 \cdot (1/2)^t \\ (1/2)^t \cdot (d_1 \cdot t + d_2) \\ (1/2)^t \cdot [d_1 \cdot (2^t - 1 - t) + d_2 \cdot (2^t - 1)] + d_3 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Vamos calcular agora o limite de cada coordenada do vetor  $Norm(M_0^t d)$  definido em (5.3).

- Limite da primeira coordenada:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (Norm(M_0^t d))_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_1}{2^t} = 0.$$

- Limite da segunda coordenada:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (Norm(M_0^t d))_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_1 \cdot t + d_2}{2^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_1}{2^t \cdot \ln 2} = 0.$$

- *Limite da terceira coordenada:*

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} (Norm(M_0 d))_3 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(d_1 + d_2)(2^t - 1) - t \cdot d_1 + 2^t \cdot d_3}{2^t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^t - d_1 - d_1 \cdot t - d_2}{2^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^t \cdot \ln 2 - d_1}{2^t \cdot \ln 2} = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^t \cdot (\ln 2)^2}{2^t \cdot (\ln 2)^2} = 1.
\end{aligned}$$

*Portanto,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Norm(M_0^t d) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = d_{dom}.$$

# Capítulo 6

## Aplicação: Sistemas com Comprimento Variável

Neste capítulo\* vamos mostrar, como exemplo, que é possível estudar alguns processos com comprimento variável definidos e discutidos nas referências [33], [35] e [36], usando processos definidos neste trabalho, PWC.

### 6.1 Sistemas com Comprimento Variável

A maioria dos estudos feitos para sistemas de partículas supõe que o conjunto de componentes, ou seja, o espaço, não muda no processo de interação. Cada uma dessas componentes pode assumir diferentes estados, mas elas mesmas não podem aparecer ou desaparecer no processo, ou seja, as componentes não são criadas ou destruídas no decorrer do processo.

Em [35], é apresentada uma nova classe de sistemas de partículas unidimensionais com tempo contínuo, na qual componentes do sistema podem aparecer e desaparecer no processo de interação. Esta classe é chamada de **sistemas com comprimento variável**. Neste trabalho, foi considerado apenas o caso em que

---

\*As idéias iniciais da secção 6.1 foram desenvolvidas em colaboração com A. D. Ramos.

cada componente pode assumir somente dois estados, 0 e 1.

No caso finito, ou seja, no caso em que o número de componentes é finito todo o tempo, o comprimento variável significa que quando uma combinação de estados é substituída por outra, os comprimentos dessas combinações podem diferir, ou seja, o número de componentes em cada tempo  $t$  pode ser diferente.

Se uma combinação de estados é substituída por outra com o mesmo número de elementos é dito que a substituição tem **comprimento constante**, caso contrário **comprimento variável**.

Embora sistemas com comprimento variável tenham sido pouco estudados, eles podem ser úteis na modelagem de vários fenômenos naturais. Por exemplo, algumas estruturas biológicas podem ser aproximadas por modelos unidimensionais nos quais as componentes podem representar células ou microorganismos, os quais podem dividir-se, morrer, ser infectados ou sofrer uma mutação [35].

Usando a notação das referências [33] e [36], seja  $\mathcal{A}$  um conjunto não vazio finito ou contável, chamado **alfabeto**. Os elementos deste conjunto são chamados de **letras**. Denotamos por **palavra** qualquer seqüência finita de elementos de  $\mathcal{A}$ . Chamamos de **comprimento de uma palavra** o número de letras dela. Chamamos de **dicionário** o conjunto de palavras no alfabeto  $\mathcal{A}$ .

Chamamos de **espaço de configurações** o produto bi-infinito

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \dots \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \dots$$

Uma **configuração**  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  é uma seqüência bi-infinita de elementos  $x_i$  de  $\mathcal{A}$ . Chamamos de **cilindro fino** definido por  $a_m, \dots, a_n$  o conjunto

$$\{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : x_i = a_i \text{ para todo } i \in [m, n]\},$$

onde  $a_i \in \mathcal{A}$ .

Neste capítulo, diferente do modo como é feito em outras partes desta Tese, escrevemos operadores após medidas, pois estamos usando a notação das referências [33] e [36].

Uma medida  $\nu$  é chamada **invariante** para um operador linear  $M$  se  $\nu M = \nu$ .

Nós consideramos medidas normalizadas em  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , ou seja, medidas de probabilidade neste conjunto. Uma medida é dita **uniforme** se ela é invariante sob todas as translações.

Considerando medidas uniformes, para qualquer palavra  $W = (a_1, \dots, a_n)$  seja

$$\mu(W) = \mu(a_1, \dots, a_n) = \mu(x_{i+1} = a_1, \dots, x_{i+n} = a_n). \quad (6.1)$$

Como  $\mu$  é uniforme, a probabilidade (6.1) não depende de  $i$ . Chamamos (6.1) a **frequência** da palavra  $W$  na medida  $\mu$ . Denotamos por  $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$  o conjunto das medidas uniformes no espaço de configurações  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ .

Em [11], [21], [22], [23], [24] e [25], são apresentados sistemas similares ao estudado neste capítulo, no entanto, a forma de tratar os resultados e as técnicas utilizadas para estes estudos são diferentes daquelas empregadas nesta Tese. Na maior parte destes trabalhos considera-se tempo contínuo; em nosso estudo consideramos apenas tempo discreto. Em [21], é dito que uma analogia das definições com tempo contínuo pode ser feita de forma fácil para tempo discreto, considerando casos particulares mas não para casos mais gerais.

Em [23], é comentado que os processos definidos neste trabalho abrangem muitos dos processos bem conhecidos como processos com interação local, máquina de Turing etc., é dito também que esses processos têm aplicações nas linguagens de programação e nos modelos de crescimento biológicos, trazendo assim novas conexões entre ciência da computação e física matemática.

Consideremos agora o espaço das configurações  $\mathcal{A} = \{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$ , onde  $\ominus$  e  $\oplus$  são dois estados possíveis de cada componente, denominados **menos** e **mais**, respectivamente.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de transformações permitidas nos processos com comprimento variável:

**Morte:** a  $j$ -ésima componente desaparece. Neste caso, as  $(j-1)$ -ésima e a  $(j+1)$ -ésima componentes tornam-se vizinhas e, no caso finito, o número de componentes diminui uma unidade. (6.2)

**Conversão:** a  $j$ -ésima componente muda seu estado de 0 para 1 e vice-versa. Neste caso, o número de componentes não muda, logo esta é uma substituição com comprimento constante. (6.3)

**Mitose:** a  $j$ -ésima componente duplica. No caso finito, o número de componentes aumenta uma unidade. (6.4)

Consideremos agora um caso de sistemas com comprimento variável com tempo discreto, no qual temos apenas três operações, Morte, Conversão e Mitose, e dois estados  $\ominus$  e  $\oplus$ .

Segundo a notação das referências [33] e [36], o processo, com tempo discreto, contendo apenas as operações de Morte, Conversão e Mitose, é composto por três operadores denominados **morte**, **flip** e **mitose**, denotados por  $\text{Mort}_{\alpha}$ ,  $\text{Flip}_{\beta}$  e  $\text{Mit}_{\gamma}$ , respectivamente. O parâmetro  $\alpha$  assume valores em  $(0, 1)$ . Os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  assumem valores em  $[0, 1]$ .

Denotamos as medidas concentradas nas configurações na qual todas as componentes possuem estado  $\ominus$  e na qual todas as componentes possuem estados  $\oplus$  por  $\delta_{\ominus}$  e  $\delta_{\oplus}$ , respectivamente.

O operador  $\text{Mort}_\alpha$  é de comprimento variável; ele efetua a operação de Morte em um único sentido, ou seja, uma componente no estado  $\ominus$  irá desaparecer com probabilidade  $\alpha$  independente das outras componentes.

O operador  $\text{Flip}_\beta$  efetua a operação de Conversão em um único sentido, ou seja, ele modifica o estado da componente de  $\ominus$  para  $\oplus$  com probabilidade  $\beta$  independente das outras componentes.

O operador  $\text{Mit}_\gamma$  também é de comprimento variável; ele atua como a operação de Mitose em um único sentido, ou seja, sempre que uma componente no estado  $\ominus$  aparecer na configuração esta irá duplicar-se com probabilidade  $\gamma$  independente das outras componentes. Este processo é definido por

$$\mu_t = \mu Q^t, \quad (6.5)$$

onde

$$Q = \text{Mort}_\alpha \text{Flip}_\beta \text{Mit}_\gamma. \quad (6.6)$$

Neste caso, primeiro atua o operador morte, depois o operador flip e por último o operador mitose, para todo  $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

A medida  $\delta_\oplus$  é uma medida invariante deste processo, pois se começarmos com uma configuração na qual todas as componentes possuem estado  $\oplus$ , o estado destas componentes não muda no decorrer do tempo, permanecendo  $\oplus$  sempre.

Os casos  $\beta = 0$  e  $\beta = 1$  são fáceis e serão analisados a seguir.

No caso em que começamos com uma configuração na qual todas as componentes possuem estado  $\ominus$  e  $\beta = 0$ , vamos ter como uma medida invariante a medida  $\delta_\ominus$ . Assim, se  $\beta = 0$ , o processo descrito por (6.5) não é ergódico (ver definição 8 na página 16).



Seja  $\beta = 1$ . Neste caso, se começamos com uma configuração na qual todas as componentes possuem estado  $\ominus$ , vamos ter como medida resultante a medida  $\delta_{\ominus}$ .

Seja uma medida  $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ . Como antes, denotamos  $\mu(\ominus)$  a frequência de  $\ominus$  na medida  $\mu$ .

Portanto,

$$\begin{aligned}\mu\text{Mit}_{\gamma}(\ominus) &= \frac{\mu(\ominus) + \gamma\mu(\ominus)}{1 + \gamma\mu(\ominus)} \\ &= \frac{(1 + \gamma)\mu(\ominus)}{1 + \gamma\mu(\ominus)}.\end{aligned}\tag{6.7}$$

Para todo  $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ ,

$$\mu\text{Flip}_{\beta}(\ominus) = (1 - \beta)\mu(\ominus)$$

e

$$\mu\text{Mort}_{\alpha}(\ominus) = \frac{(1 - \alpha)\mu(\ominus)}{1 - \alpha\mu(\ominus)}.$$

Logo, substituindo  $\mu(\ominus)$  por  $\mu\text{Flip}_{\beta}(\ominus)$  em (6.7), temos

$$\begin{aligned}\mu\text{Flip}_{\beta}\text{Mit}_{\gamma}(\ominus) &= \frac{(1 + \gamma)\mu\text{Flip}_{\beta}(\ominus)}{1 + \gamma\mu\text{Flip}_{\beta}(\ominus)} \\ &= \frac{(1 + \gamma)(1 - \beta)\mu(\ominus)}{1 + \gamma(1 - \beta)\mu(\ominus)}.\end{aligned}\tag{6.8}$$

Da mesma forma, substituindo  $\mu(\ominus)$  por  $\mu\text{Mort}_{\alpha}(\ominus)$  em (6.8), temos

$$\begin{aligned}\mu\text{Mort}_{\alpha}\text{Flip}_{\beta}\text{Mit}_{\gamma}(\ominus) &= \frac{(1 + \gamma)(1 - \beta)\mu\text{Mort}_{\alpha}(\ominus)}{1 + \gamma(1 - \beta)\mu\text{Mort}_{\alpha}(\ominus)} \\ &= \frac{(1 + \gamma)(1 - \beta)(1 - \alpha)\mu(\ominus)}{1 + [\gamma(1 - \beta)(1 - \alpha) - \alpha]\mu(\ominus)}.\end{aligned}\tag{6.9}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \mu(\ominus) - \mu\text{Mort}_\alpha\text{Flip}_\beta\text{Mit}_\gamma(\ominus) = \\ &= \frac{\{[\gamma(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha]\mu(\ominus) - [-1 + (1+\gamma)(1-\beta)(1-\alpha)]\}\mu(\ominus)}{1 + [\gamma(1-\beta)(1-\alpha) - \alpha]\mu(\ominus)}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

O denominador de (6.10) em nosso caso é sempre positivo. Logo, esta divisão faz sentido. Além disso,

$$\begin{aligned} & \mu(\ominus) - \mu\text{Mort}_\alpha\text{Flip}_\beta\text{Mit}_\gamma(\ominus) = 0 \\ & \quad \Updownarrow \\ & \mu(\ominus) \in \left\{ 0, \frac{-\beta(1-\alpha) + \gamma(1-\beta)(1-\alpha) - \alpha}{\gamma(1-\beta)(1-\alpha) - \alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

**Teorema 6.** *Seja o operador  $\mathcal{Q}$  definido em (6.6) na página 98.*

1. *Se*

$$\gamma > \frac{\beta(1-\alpha) + \alpha}{(1-\beta)(1-\alpha)},$$

*então, além da medida  $\delta_\oplus$  o operador  $\mathcal{Q}$  tem outra medida invariante  $\nu \in \mathcal{M}_{\{\oplus, \ominus\}}$  tal que*

$$\nu(\ominus) = \frac{-\beta(1-\alpha) + \gamma(1-\beta)(1-\alpha) - \alpha}{\gamma(1-\beta)(1-\alpha) - \alpha}.$$

2. *Se*

$$\gamma \leq \frac{\beta(1-\alpha) + \alpha}{(1-\beta)(1-\alpha)},$$

*o operador  $\mathcal{Q}$  tem apenas uma medida invariante, a saber,  $\delta_\oplus$ .*

**Demonstração do Teorema 6.** Inicialmente vamos demonstrar o primeiro item deste teorema; em seguida o segundo item.

**Demonstração do primeiro item do Teorema 6.** Seja

$$p = \frac{-\beta(1-\alpha) + \gamma(1-\beta)(1-\alpha) - \alpha}{\gamma(1-\beta)(1-\alpha) - \alpha}.$$

Por (6.11), se  $\mu(\ominus) \in \{0, p\}$  temos  $\mu(\ominus) = \mu\mathcal{Q}(\ominus)$  e para

$$\gamma > \frac{\beta(1-\alpha) + \alpha}{(1-\beta)(1-\alpha)},$$

$0 < p$ . *O primeiro item do Teorema 6 está demonstrado.*

**Demonstração do segundo item do Teorema 6.** Seja

$$p = \frac{-\beta(1-\alpha) + \gamma(1-\beta)(1-\alpha) - \alpha}{\gamma(1-\beta)(1-\alpha) - \alpha}.$$

Por (6.11), se  $\mu(\ominus) \in \{0, p\}$  temos  $\mu(\ominus) = \mu\mathcal{Q}(\ominus)$  e para

$$\gamma \leq \frac{\beta(1-\alpha) + \alpha}{(1-\beta)(1-\alpha)},$$

$p \leq 0$ .

Portanto,

$$\mu\mathcal{Q}(\ominus) = 0$$

↓

$$\mu\mathcal{Q}(\oplus) = 1$$

↓

$$\mu\mathcal{Q} = \delta_{\oplus}.$$

*O segundo item do Teorema 6 está demonstrado.*

*Portanto o Teorema 6 está demonstrado.*

A figura 6.1 ilustra a superfície a qual separa as regiões de ergodicidade e de não ergodicidade do operador  $\mathcal{Q}$  definido em (6.6). A equação desta superfície é  $\gamma = \frac{\beta(1-\alpha) + \alpha}{(1-\beta)(1-\alpha)}$ . A equação da curva  $c_1$  foi obtida para  $\alpha = 0$ , a saber

$\gamma = \frac{\beta}{1-\beta}$ . Para a curva  $c2$  tomamos  $\gamma = 1$  e obtemos  $\beta = \frac{1-2\cdot\alpha}{2\cdot(1-\alpha)}$ . No caso da curva  $c3$ , tomamos  $\beta = 0$  e obtemos  $\gamma = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ .

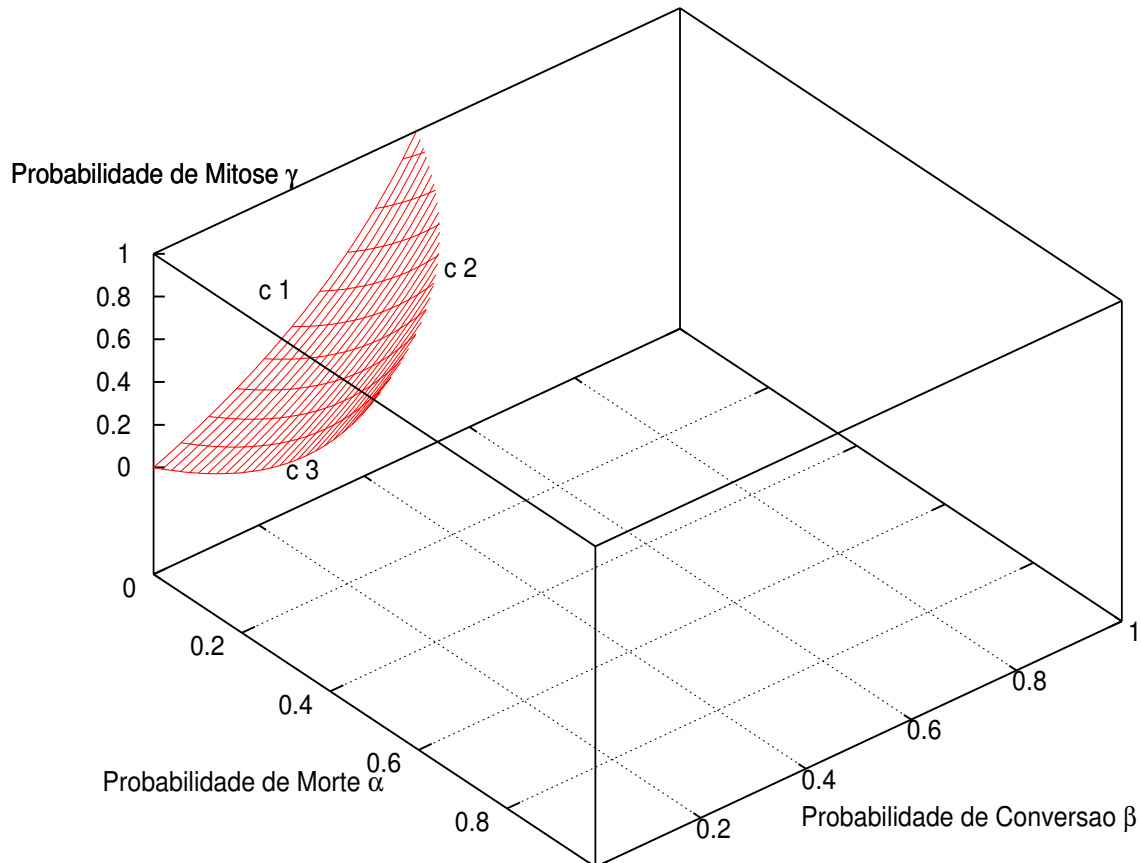


Figura 6.1: Superfície de separação entre as regiões nas quais o operador  $\mathcal{Q}$  definido em (6.6) tem comportamento ergódico vs. não ergódico.

A figura 6.2 ilustra as curvas  $c1$ ,  $c2$  e  $c3$ .

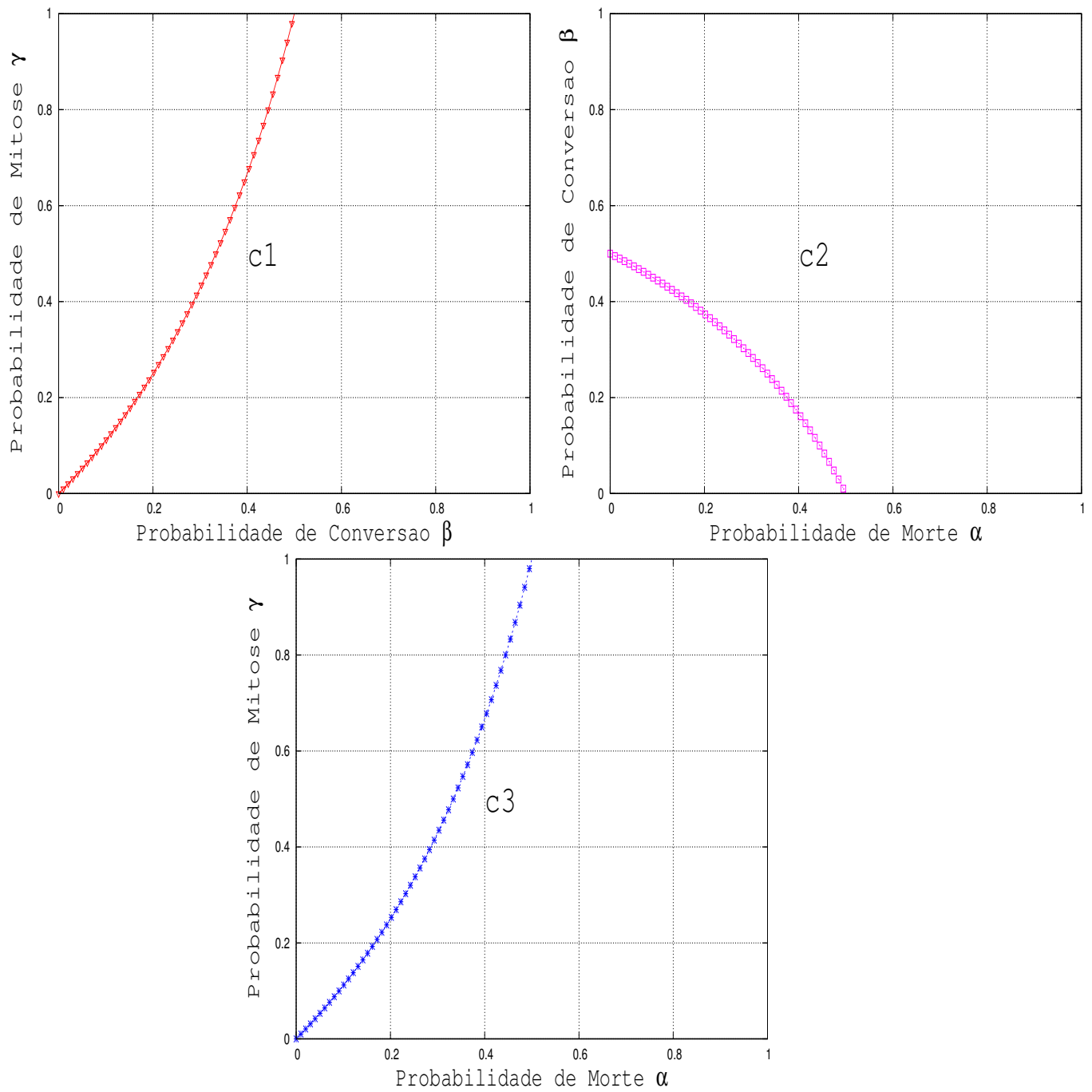


Figura 6.2: *Curvas c1, c2 e c3, apresentadas na figura 6.1*

## 6.2 Estudo de Processos com Comprimento Variável Usando Processos PWC

Nesta seção mostraremos que os nossos processos PWC podem ajudar a estudar alguns processos com comprimento variável.

É importante lembrar que, considerando nossos processos, não podemos determinar a densidade de palavras com comprimento maior do que um, como por exemplo,  $\oplus\ominus$ , pois não consideramos localização espacial.

Vamos representar os processos definidos na seção 6.1 usando nossas notações. Consideremos agora um sistema com apenas dois tipos de partículas. Denotamos as partículas no estado  $\oplus$  do sistema definido na seção 6.1 como 1-partículas e as partículas no estado  $\ominus$  como 2-partículas.

Neste caso, temos o conjunto

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_1 + v_2 = 1 \right\}.$$

Denotamos os seguintes vetores

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sejam as seguintes probabilidades de transformação

$$\begin{aligned} \theta_{1,r} &= 1, & \theta_{2,r} &= (1 - \alpha)\beta, & \theta_{2,u} &= (1 - \alpha)(1 - \beta)\gamma, & \theta_{2,v} &= \alpha \\ \text{e } \theta_{2,s} &= (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma). \end{aligned} \tag{6.12}$$

A probabilidade de transformação  $\theta_{2,r}$  é a probabilidade de uma partícula no estado  $\ominus$  se tornar em uma partícula no estado  $\oplus$ , essa transformação é semelhante à operação de Conversão definida em (6.3) na página 97.

Da mesma forma, a probabilidade de transformação  $\theta_{2,u}$  é a probabilidade de uma partícula no estado  $\ominus$  se tornar em duas partículas no estado  $\ominus$ , essa transformação é semelhante à operação de Mitose definida em (6.4) na página 97.

De modo similar, a probabilidade de transformação  $\theta_{2,v}$  é a probabilidade de uma partícula no estado  $\ominus$  desaparecer do sistema, essa transformação é semelhante à operação de Morte definida em (6.2) na página 97.

Seja a matriz  $M_0$  definida em (1.16) na página (17). Desta forma,

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & (1 - \alpha)\beta \\ 0 & (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 + \gamma) \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que  $M_0$  é redutível, e, portanto, não é primitiva. Como  $M_0$  neste caso não é primitiva, vamos estudar em quais condições nossos resultados podem ser aplicados neste sistema.

Sejam  $d_1$  a densidade de 1-partículas e  $d_2$  a densidade de 2-partículas,  $\forall d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in D$ . Assim temos,

$$\forall d \in D : M_0 d = \begin{pmatrix} d_1 + (1 - \alpha)\beta d_2 \\ (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 + \gamma) d_2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, para todo  $d \in D$ ,

$$\tilde{M}d = \text{Norm}(M_0 d) = \begin{pmatrix} \frac{d_1 + (1 - \alpha)\beta d_2}{d_1 + d_2 [1 + (1 - \alpha)(1 - \beta)\gamma - \alpha]} \\ \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 + \gamma) d_2}{d_1 + d_2 [1 + (1 - \alpha)(1 - \beta)\gamma - \alpha]} \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Agora vamos estudar os pontos fixos do sistema com o operador  $\tilde{M}$ .

Os autovalores da matriz  $M_0$  são:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 + \gamma).$$

Os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1$  são todos os vetores em  $\mathbb{R}^2$  da forma:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_2$  são todos os vetores em  $\mathbb{R}^2$  da forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{(1 - \alpha)\beta}{-(1 - \alpha)\beta + (1 - \alpha)(1 - \beta)\gamma - \alpha} v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Vamos estudar os seguintes casos:

**Caso i)**  $\lambda_1 = \lambda_2 \implies \gamma = \frac{\alpha + (1 - \alpha)\beta}{(1 - \alpha)(1 - \beta)}.$

Neste caso, o autovalor dominante não é único.

O autovetor associado a  $\lambda_1$  e o autovetor associado a  $\lambda_2$  coincidem. No conjunto  $D$  este autovetor é único e igual ao vetor:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o qual é ponto fixo da aplicação  $\tilde{M}$ .

Então, para todo  $d \in D$ , queremos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Demonstração do Caso i).** Podemos observar que

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & (1 - \alpha)\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_0^t = \begin{pmatrix} 1 & t(1 - \alpha)\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Assim,

$$\tilde{M}^t d = \text{Norm}(M_0^t d) = \begin{pmatrix} \frac{d_1 + t(1-\alpha)\beta d_2}{d_1 + d_2[t(1-\alpha)\beta + 1]} \\ \frac{d_2}{d_1 + d_2[t(1-\alpha)\beta + 1]} \end{pmatrix}.$$

Seja  $d_2 = 0$ , assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seja  $d_2 \neq 0$ . Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d &= \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_1 + t(1-\alpha)\beta d_2}{d_1 + d_2[t(1-\alpha)\beta + 1]} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_2}{d_1 + d_2[t(1-\alpha)\beta + 1]} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(1-\alpha)\beta d_2}{d_2(1-\alpha)\beta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Desta forma, o sistema com  $\tilde{M}$  tende para o ponto fixo quando  $t \rightarrow \infty$ . Aqui, temos que o sistema com a aplicação  $\tilde{M}$  tende para um ponto fixo no qual a densidade de partículas no estado  $\oplus$  é 1.

Logo o *Caso i)* está demonstrado.

**Caso ii)**  $\lambda_1 > \lambda_2 \implies \gamma < \frac{\alpha + (1-\alpha)\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}.$

Neste caso, o autovalor dominante é  $\lambda_1$ .

Relembramos, o autovetor dominante associado a  $\lambda_1$  em  $D$ , é o vetor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o qual é ponto fixo de  $\tilde{M}$ .

Da mesma forma que no caso anterior, para todo  $d \in D$ , vamos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Demonstração do Caso ii).** Podemos observar que

$$M_0^t = \begin{pmatrix} 1 & (1 - \alpha) \beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k \\ 0 & \lambda_2^t \end{pmatrix}.$$

Assim, para todo  $d \in D$ ,

$$\tilde{M}^t d = Norm(M_0^t d) = \begin{pmatrix} \frac{d_1 + d_2 (1 - \alpha) \beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k}{d_1 + d_2 \left[ (1 - \alpha) \beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k + \lambda_2^t \right]} \\ \frac{d_2 \lambda_2^t}{d_1 + d_2 \left[ (1 - \alpha) \beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k + \lambda_2^t \right]} \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_1 + d_2 (1 - \alpha) \beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k}{d_1 + d_2 \left[ (1 - \alpha) \beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k + \lambda_2^t \right]} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_2 \lambda_2^t}{d_1 + d_2 \left[ (1 - \alpha) \beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k + \lambda_2^t \right]} \end{pmatrix}.$$

Como  $\lambda_2 < \lambda_1 = 1$ , temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k = \frac{1}{1 - \lambda_2}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_2^t = 0.$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d = \begin{pmatrix} d_1 + \frac{d_2(1-\alpha)\beta}{1-\lambda_2} \\ d_1 + \frac{d_2(1-\alpha)\beta}{1-\lambda_2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Desta forma, podemos observar que, neste caso, do mesmo modo que no item i), o sistema com  $\tilde{M}$  tende para o ponto fixo quando  $t \rightarrow \infty$ .

Logo o Caso ii) está demonstrado.

**Caso iii)**  $\lambda_1 < \lambda_2 \implies \gamma > \frac{\alpha + (1-\alpha)\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}$ .

Neste caso o autovalor dominante é  $\lambda_2$ .

O autovetor dominante associado a  $\lambda_2$  pertencente ao conjunto  $D$  é

$$\begin{pmatrix} \frac{(1-\alpha)\beta}{\gamma(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha} \\ \frac{-(1-\alpha)\beta + \gamma(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha}{\gamma(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha} \end{pmatrix}$$

o qual é ponto fixo de  $\tilde{M}$ .

Neste item, queremos mostrar que

- Para  $d_2 = 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Para  $d_2 \neq 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d = \begin{pmatrix} \frac{(1-\alpha)\beta}{\gamma(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha} \\ \frac{-(1-\alpha)\beta + \gamma(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha}{\gamma(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha} \end{pmatrix}.$$

**Demonstração do Caso iii).** Da mesma forma que no item ii) podemos observar que

$$M_0^t = \begin{pmatrix} 1 & (1-\alpha)\beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k \\ 0 & \lambda_2^t \end{pmatrix}.$$

Assim, do mesmo modo,

$$\tilde{M}^t d = Norm(M_0^t d) = \begin{pmatrix} \frac{d_1 + d_2 (1-\alpha)\beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k}{d_1 + d_2 \left[ (1-\alpha)\beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k + \lambda_2^t \right]} \\ \frac{d_2 \lambda_2^t}{d_1 + d_2 \left[ (1-\alpha)\beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k + \lambda_2^t \right]} \end{pmatrix}.$$

Seja  $d_2 = 0$ , então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seja  $d_2 \neq 0$ . Vamos calcular o seguinte limite

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d &= \left( \begin{array}{c} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_1 + d_2 (1 - \alpha) \beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k}{d_1 + d_2 \left[ (1 - \alpha) \beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k + \lambda_2^t \right]} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_2 \lambda_2^t}{d_1 + d_2 \left[ (1 - \alpha) \beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^k + \lambda_2^t \right]} \end{array} \right) = \\
&= \left( \begin{array}{c} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{d_1}{\lambda_2^t} + d_2 (1 - \alpha) \beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^{k-t}}{\frac{d_1}{\lambda_2^t} + d_2 \left[ (1 - \alpha) \beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^{k-t} + 1 \right]} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_2}{\frac{d_1}{\lambda_2^t} + d_2 \left[ (1 - \alpha) \beta \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^{k-t} + 1 \right]} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Como  $\lambda_2 > \lambda_1 = 1$  e  $k - t < 0$  temos  $\lambda_2^{k-t} < 1$ , assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{t-1} \lambda_2^{k-t} = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_2 - 1}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_2^t = \infty.$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}^t d = \begin{pmatrix} \frac{\frac{d_2(1-\alpha)\beta}{\lambda_2-1}}{\frac{d_2(1-\alpha)\beta}{\lambda_2-1} + d_2} \\ \frac{d_2}{\frac{d_2(1-\alpha)\beta}{\lambda_2-1} + d_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1-\alpha)\beta}{\gamma(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha} \\ \frac{-(1-\alpha)\beta + \gamma(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha}{\gamma(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha} \end{pmatrix}.$$

Desta forma, neste caso, temos que o sistema com  $\tilde{M}$ , dependendo da condição inicial, pode tender para dois pontos fixos diferentes quando  $t \rightarrow \infty$ . Aqui, temos que o sistema com a aplicação  $\tilde{M}$  pode tender para um ponto fixo no qual a densidade de partículas no estado  $\oplus$  é 1 ou tender para um ponto fixo no qual a densidade de partículas no estado  $\ominus$  é

$$\frac{-(1-\alpha)\beta + \gamma(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha}{\gamma(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha}.$$

Logo o Caso iii) está demonstrado.

A tabela 6.1 a seguir apresenta um resumo comparativo sobre os resultados obtidos considerando o processo estocástico definido por (6.5) na página (98) e a sua aproximação determinística definida em (6.13) na página 105.

Processo	$\gamma > \frac{\beta(1-\alpha) + \alpha}{(1-\beta)(1-\alpha)}$	$\gamma \leq \frac{\beta(1-\alpha) + \alpha}{(1-\beta)(1-\alpha)}$
estocástico original	pelo menos duas medidas invariantes	uma única medida invariante
aproximação determinística	pelo menos dois pontos fixos	um único ponto fixo

Tabela 6.1: Comparação entre os resultados obtidos com o processo estocástico (6.5) e o processo determinístico (6.13).

Podemos generalizar o sistema apresentado nesta seção para  $n$  tipos de partículas. Como já foi dito na seção 1.2, sejam  $\delta_k$  o vetor contendo um na  $k$ -ésima posição e zeros em todas as outras posições e  $\delta_0$  o vetor contendo zeros em todas as posições. Podemos escrever as operações de Morte, Conversão e Mitose de forma mais geral, para todo  $k = 1, \dots, n$ :

- Conversão: nesta operação, para todo  $i = 1, \dots, n$ , cada  $k$ -partícula pode se transformar em um vetor  $\delta_i$  com probabilidade positiva  $\theta_{k,\delta_i}$ , independente de todas as outras. Neste caso, estamos representando a possibilidade de cada  $k$ -partícula se transformar em uma partícula de qualquer tipo.
- Morte: nesta operação cada  $k$ -partícula pode se transformar no vetor  $\delta_0$  com uma probabilidade positiva  $\theta_{k,\delta_0}$ , independente de todas as outras. Neste caso, temos que cada  $k$ -partícula poder morrer com uma probabilidade positiva.
- Mitose: nesta operação cada  $k$ -partícula pode se transformar no vetor  $2\delta_k$  com uma probabilidade positiva  $\theta_{k,2\delta_k}$ , independente de todas as outras. Nesta operação, estamos representando a possibilidade de cada uma  $k$ -partícula se transformar em duas  $k$ -partículas do mesmo tipo  $k$ .

Observe que Conversão de  $k$ -partícula no vetor  $\delta_k$  significa que esta partícula permanece a mesma, não há mudança.

Pela condição (1.10) definida na página 13, para todo  $k = 1, \dots, n$ ,

$$\sum_{i=1}^n \theta_{k,\delta_i} + \theta_{k,2\delta_k} + \theta_{k,\delta_0} = 1.$$

Neste caso,

$$M_0 = \begin{pmatrix} \theta_{1,\delta_1} + 2\theta_{1,2\delta_1} & \cdots & \theta_{n,\delta_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_{1,\delta_n} & \cdots & \theta_{n,\delta_n} + 2\theta_{n,2\delta_n} \end{pmatrix}.$$

Pelo teorema 5, se a matriz  $M_0$  é primitiva, então a seqüência de vetores  $\tilde{M}^t d = \text{Norm}(M_0^t d)$  tem o mesmo limite quando  $t \rightarrow \infty$  para todo vetor inicial  $d \in D^+$ .



## Capítulo 7

# Conclusões e Perspectivas Futuras

No nosso trabalho apresentamos uma classe de sistemas de partículas sem colisões, com tempo discreto, a qual nós chamamos PWC, e estudamos a sua aproximação determinística. Provamos que sob poucas considerações o nosso operador determinístico tem comportamento semelhante ao de um operador ergódico, conforme pode ser observado na definição 10 na página 23.

A classe de processos PWC apresentada nesta Tese se propõe a representar diversos processos reais, incluindo processos de dinâmica populacional e processos biológicos, além de dar surgimento a um novo ramo para pesquisas futuras dentro da teoria das probabilidades. No entanto, os resultados obtidos representam um primeiro passo no estudo desta classe de processos o qual precisa ter continuidade.

Desta forma, pretendemos estudar como é feita esta aproximação para todo  $t > 0$ , tornando assim nossos resultados mais abrangentes. Em seguida, pretendemos verificar também se a seqüência de medidas resultante do nosso processo estocástico para  $t \rightarrow \infty$  é levada em uma medida concentrada no ponto fixo.

A quantidade de trabalhos na literatura que se propõem a fazer um estudo matemático de processos físicos e biológicos tem se tornado cada vez mais extensa.

Muitos destes trabalhos apresentam modelos estocásticos e suas respectivas aproximações determinísticas aplicando diferentes abordagens, inclusive com o estudo de pontos fixos e a ergodicidade dos processos; por exemplo, em [20], é estudada a existência de pontos fixos em alguns sistemas de reações químicas.

No entanto, esses trabalhos diferem do nosso em muitos aspectos. Em [12], por exemplo, foi provada a convergência para um sistema dinâmico determinístico de um processo aleatório de Markov definido em redes de filas, onde a disciplina adotada nas filas foi a FIFO (*First In First Out*), ou seja, o primeiro a chegar é o primeiro a ser atendido. Isto difere do nosso trabalho pois filas cuja disciplina de atendimento depende da posição do cliente em relação aos demais elementos, como por exemplo as disciplinas FIFO e LIFO (*Last In First Out*), não podem ser representadas por processos da nossa classe, uma vez que, em nossos processos, não há interação entre as partículas.

Uma teoria de processos estocásticos que vem atraindo muita atenção e sendo objeto de inúmeros estudos na literatura, como por exemplo [17] e [18], é a teoria de *processos de ramificação* iniciada com os processos de Galton-Watson. Vários trabalhos têm surgido propondo o uso desta teoria nas mais diversas áreas do conhecimento, como por exemplo dinâmica populacional, ciência da computação e biologia molecular incluindo seqüenciamento de DNA [1], [5], [8], [28].

Acreditamos que alguns processos de ramificação podem ser representados por processos da nossa classe PWC, especialmente aqueles com tempo discreto, sem interação e nos quais não é considerada a localização espacial das partículas, como por exemplo, alguns de crescimento populacional e dinâmica molecular, com reprodução assexuada e mutações. Exemplos desses processos podem ser vistos em [8]. No entanto há casos em que os nossos processos não podem ser usados, como por exemplo, no caso dos processos estudados em [6] e [26], pois a localização

espacial representa um papel importante no estudo daqueles sistemas. Desta forma esses tipos de processos de ramificação não podem ser representados por processos da nossa classe PWC.

No decorrer dos nossos estudos nos deparamos com uma questão interessante. De fato, aproximações de sistemas estocásticos por sistemas determinísticos são freqüentemente usadas em várias ciências, algumas vezes sem uma fundamentação adequada. No caso das ciências naturais, como por exemplo física e química (com exceção de nano-processos), o número de componentes do sistema é grande, como o número de Avogadro [19], logo a aproximação determinística parece aceitável.

No entanto, nas ciências sociais, como por exemplo demografia, o número de indivíduos pode ser pequeno. No caso em que sistemas com tempo contínuo são considerados, modelos usando aproximações determinísticas por meio de equações diferenciais apresentam comportamento qualitativamente diferente do modelo estocástico associado, quando o número de componentes do sistema é pequeno, como foi mostrado por exemplo em [2] e [31].

Por exemplo, levando em conta que medidas preventivas são tomadas ao primeiro sinal de uma epidemia, o número de pessoas infectadas pode ser pequeno, como foi observado no seguinte texto [37]: *“A ocorrência de dois casos de uma tal doença, associadas no espaço e no tempo na população em questão, é considerada como prova suficiente para confirmar uma epidemia.”* Neste caso, com um número de pessoas doentes tão pequeno, é ridículo supor que este número é uma variável real e falar da derivada dela.

Vários estudos mencionam sem detalhes que se o número de componentes do sistema não é suficientemente grande, a aproximação determinística pode não ser aceitável como representação do modelo estocástico, como por exemplo [2] e

[27], mas não apresentam nenhum critério disto. No caso de tempo discreto, o qual consideramos, o mesmo problema existe.

Desta forma, nossa sugestão é descobrir os critérios e condições para usar a aproximação determinística em sistemas com tempo discreto e contínuo.

# Apêndice

Neste apêndice apresentamos quatro esquemas das demonstrações contidas neste trabalho. Em cada esquema, as setas na cor vermelha representam que o resultado foi usado na direção da seta. Lembramos que, nos esquemas 7.1, 7.2, 7.3 e 7.4, **T** significa Teorema, **TA** significa Teorema Auxiliar e **L**, Lema.

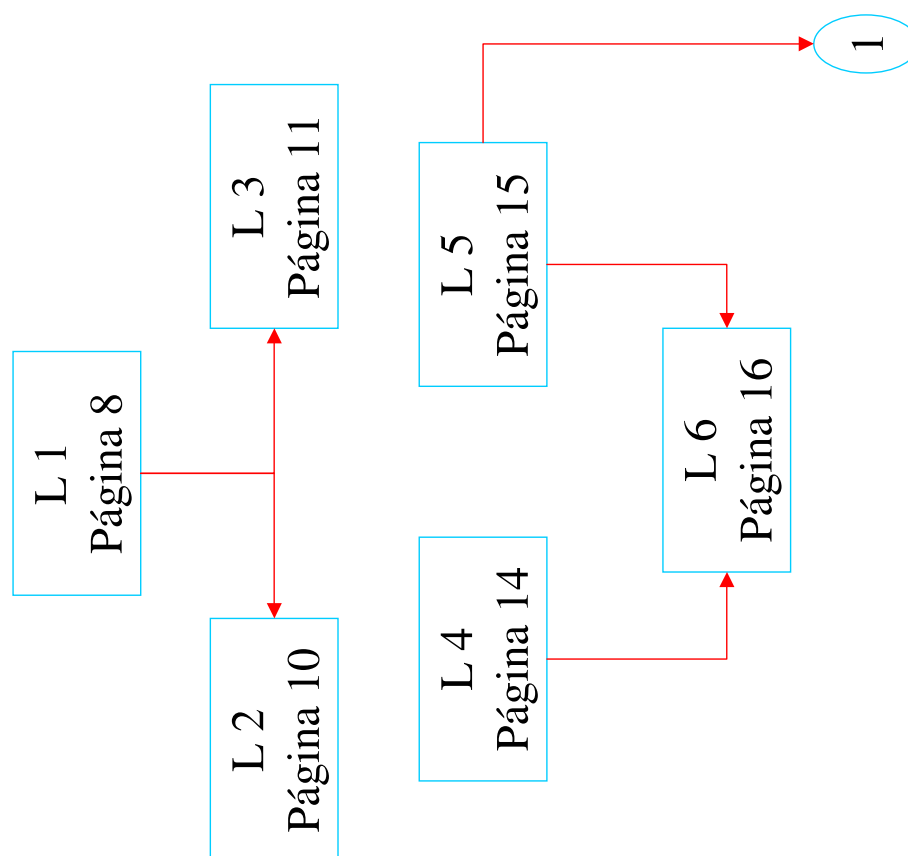


Figura 7.1: Esquema das demonstrações dos resultados contidos no capítulo 1. O número 1 disposto dentro de uma figura oval, representa a respectiva conexão com o esquema apresentado na figura 7.2.

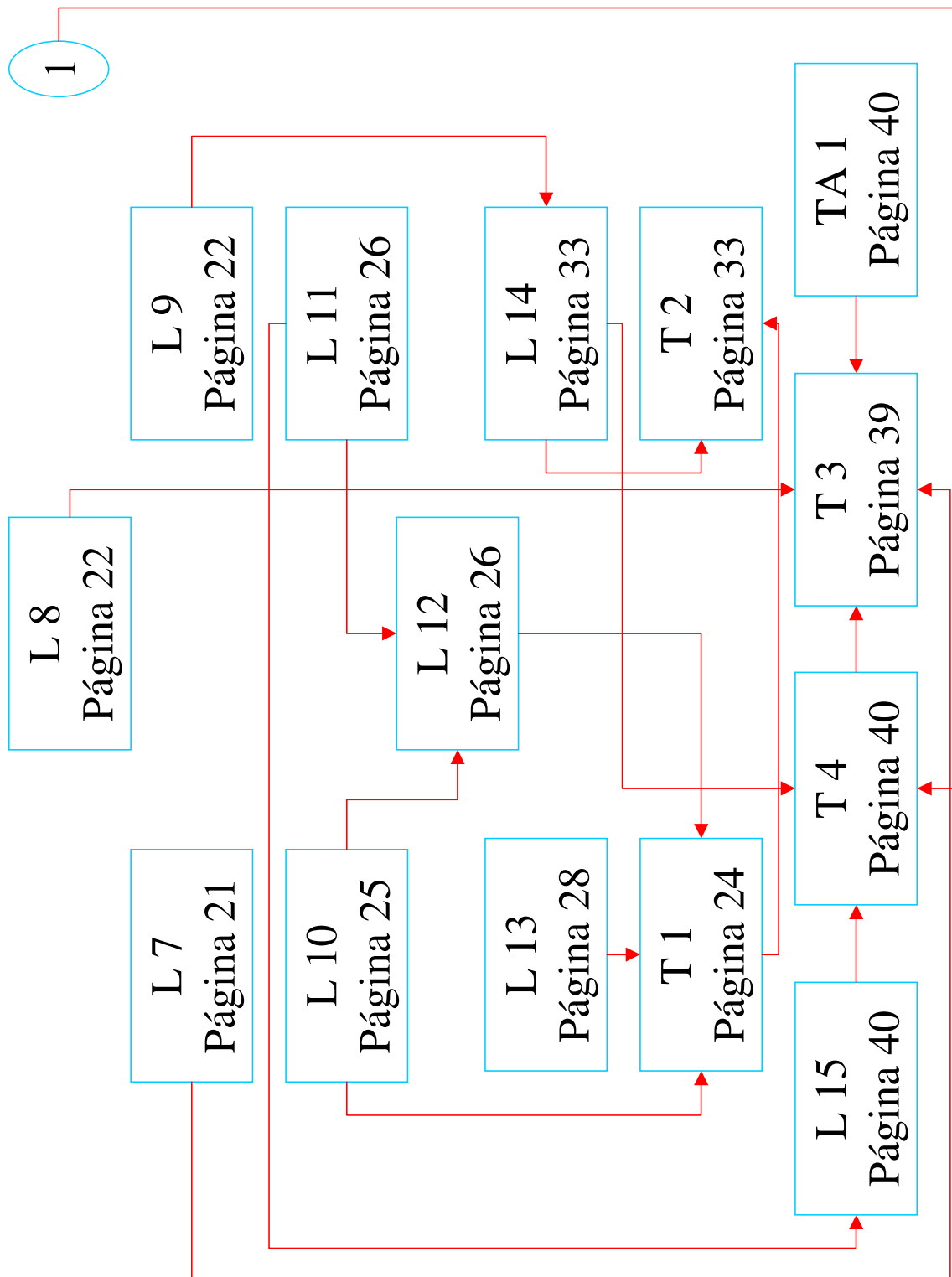


Figura 7.2: Esquema das demonstrações dos resultados contidos nos capítulos 2 e 3 e na primeira parte do capítulo 4. O número 1 disposto dentro de uma figura oval, representa a respectiva conexão com o esquema apresentado na figura 7.1.

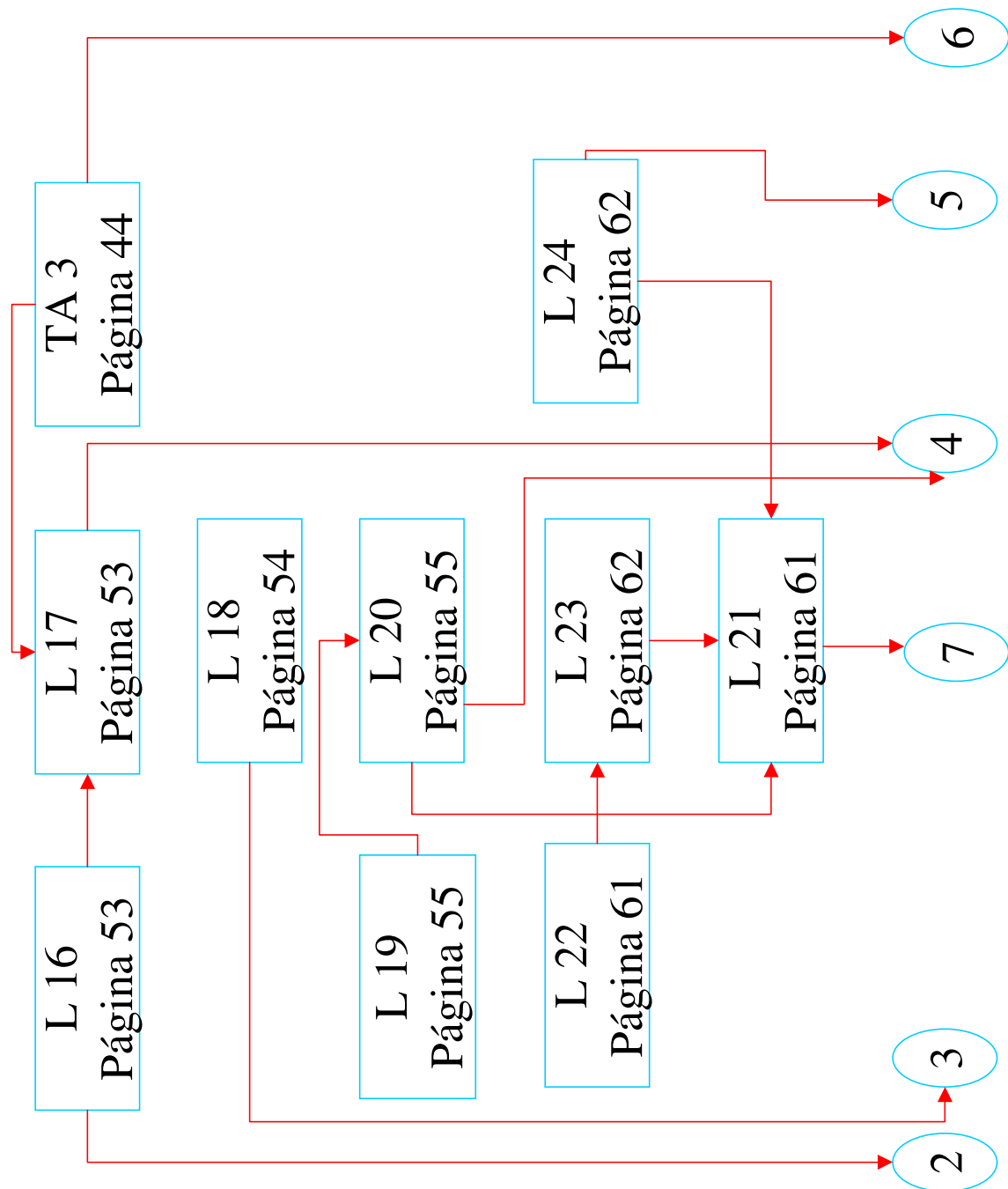


Figura 7.3: Esquema das demonstrações dos resultados contidos na segunda parte do capítulo 4. Os números 2, 3, 4, 5, 6 e 7, dispostos dentro de figuras ovais, representam as respectivas conexões com o esquema apresentado na figura 7.4.

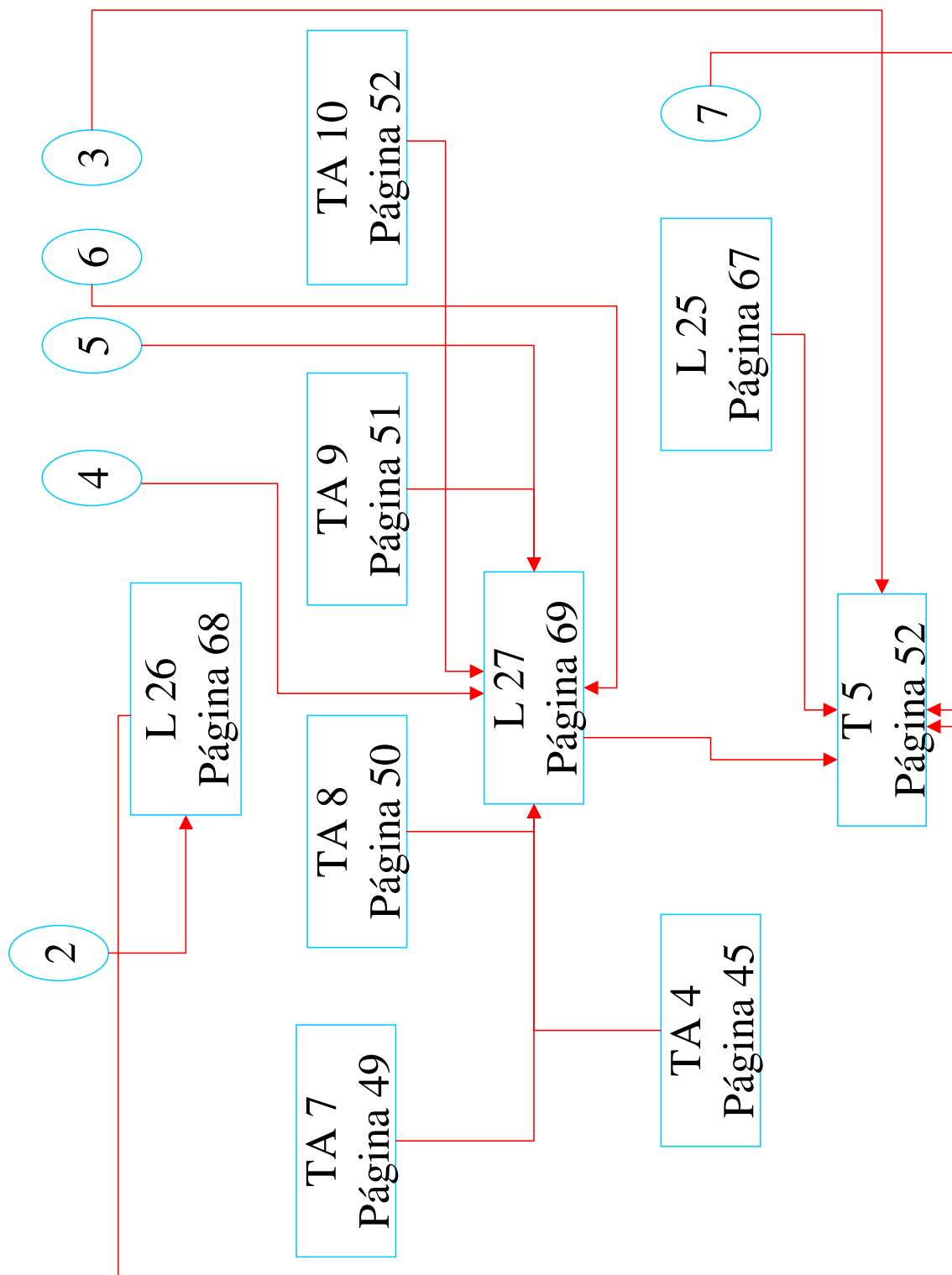


Figura 7.4: Continuação do esquema das demonstrações dos resultados contidos na segunda parte do capítulo 4, incluindo o nosso Teorema Principal (T 5). Os números 2, 3, 4, 5, 6 e 7, dispostos dentro de figuras ovais, representam as respectivas conexões com o esquema apresentado na figura 7.3.



## Referências Bibliográficas

- [1] K.B. Athreya and P.E. Ney. *Branching Processes*. New York, Springer-Verlag, (1972).
- [2] N.T.J. Barley. *The Elements of Stochastic Processes-with application to the natural sciences*. New York, John Wiley & Sons, Inc, (1976).
- [3] A.T. Bharucha-Reid. *Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications*. New York, McGraw-Hill, (1960).
- [4] P. Del Moral, L. Kallel and J. Rowe. *Modeling Genetic Algorithms with Interacting Particle Systems*. *Revista de Matematica, Teoria y aplicaciones*, v. 8, n. 2 (2001), pp. 19-77.
- [5] M. Durinx and J.A.J. Metz. Multi-type Branching Processes and Adaptive Dynamics of Structured Populations. *Branching Processes in Biology: Variation, Growth and Extinction*. Ed. by P. Haccou, P. Jagers and V. A. Vatutin. Cambridge Studies in Adaptive Dynamics 5, Cambridge University Press, (2005), pp. 266-277.
- [6] N. Gantert and S. Müller. *The Critical Branching Markov Chain is Transient*. *Markov Processes and Related Fields* 12, n. 4 (2006), pp. 805-814.
- [7] F.R. Gantmacher. *Applications of The Theory of Matrices*. New York, Interscience Publishers, (1959).

- [8] P. Haccou, P. Jagers and V.A. Vatutin. *Branching Processes: Variation, Growth, and Extinction of Populations*. Cambridge Studies in Adaptive Dynamics, Cambridge University Press, n. 5, (2005).
- [9] K. Hoffman e R. Kunze. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 2. ed., (1979).
- [10] C.S. Höniq. *Aplicações da Topologia à Análise*. Rio de Janeiro, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, (1976).
- [11] F. Karpelevich, V. Malyshev, A. Petrov, S. Pirogov and A. Rybko. *Context Free Evolution of Words*. Rapport de Recherche INRIA, n. 4413, (2002).
- [12] F. Karpelevich and A.N. Rybko. *Thermodynamical Limit for Symmetric Closed Queuing Networks*. On Dobrushin's Way. From Probability Theory to Statistical Physics. American Mathematical Society, Series 2, v. 198, (2000), pp. 133-155.
- [13] T.M. Ligget. *Interacting Particle Systems*. New York, Springer-Verlag, (1985).
- [14] E.L. Lima. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, (2001).
- [15] S. Lipschutz. *Álgebra Linear-Teoria e Problemas*. São Paulo, Makron Books, Coleção Schaum, (1994).
- [16] C.R. MacCluer. *The Many Proofs and Applications of Perron's Theorem*. Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 42, n. 3, (2000), pp. 487-498.
- [17] F. Machado and S. Popov. *Branching Random Walk in Random Environment on Trees*. Stochastic Processes and Their Applications, v. 106, n. 1, (2003), pp. 95-106.

- [18] F. Machado, S. Popov and M. Menchikov. *Recurrence and Transience of Multi Type Branching Random Walk*. Stochastic Processes and Their Applications, v. 52, n. 1, (2001), pp. 79 - 84.
- [19] B.H. Mahan. *Mahan Química-Um Curso Universitário*. São Paulo, Edgard Blücher, (1984).
- [20] V. Malyshev. *Fixed Points for Stochastic Open Chemical Systems*. Markov Processes and Related Fields 11, n. 2, (2005), pp. 337-354.
- [21] V. Malyshev. *Quantum Evolution of Words*. Theoretical Computer Science, (2002), June-July.
- [22] V. Malyshev. *Quantum Grammars*. Journal of Mathematical Physics, v. 41, n. 7, (2000), pp. 4508-4520.
- [23] V. Malyshev. *Random Grammars*. Russian Mathematical Reviews, v. 53, n. 2, (1998), pp. 107-134.
- [24] V. Malyshev. *Random Infinite Spin Graph Evolution*. On Dobrushin's Way. From Probability Theory to Statistical Physics. American Mathematical Society, Series 2, v. 198, (2000), pp. 157-168.
- [25] V. Malyshev. *Stochastic Evolution via Graph Grammars*. Rapport de Recherche INRIA, n. 3380, (1998), pp. 1-36.
- [26] S. Müller. *Recurrence and Transience for Branching Random Walks in an iid Random Environment*. Markov Processes and Related Fields, to appear in 2007.
- [27] A. Okubo, and S.A. Levin. *Diffusion and Ecological Problems-Modern Perspectives*. New York, Springer-Verlag, 2nd. ed., (1980).

- [28] P. Olofsson, O. Schwalb, R. Chakraborty and M. Kimmel. *An Application of a General Branching Process in the Study of the Genetics of Aging*. *Journal of Theoretical Biology*, v. 213, n. 4, (2001), pp. 547-557.
- [29] P.A. Rikvold and R.K.P. Zia. *Punctuated equilibria and  $1/f$  noise in a biological coevolution model with individual-based dynamics*. *Physical Review E*, 68, 031913, (2003).
- [30] G.F. Simmons. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, (1963).
- [31] R. Srivastava, L. You, J. Summers and J. Yin. *Stochastic vs. Deterministic Modeling of Intracellular Viral Kinetics*. *Journal of Theoretical Biology*, v. 218, n. 3, (2002), pp. 261-394.
- [32] A. Toom. Cellular Automata With Errors: Problems For Students of Probability. *Topics in Contemporary Probability and its Application*. Ed. by J. L. Snell. Probability and Stochastics Series, CRC Press, (1995), pp. 117-157.
- [33] A. Toom. *Non-ergodicity in a 1-D particle process with variable length*. *Journal of Statistical Physics*, v. 115, n. 3/4, (2004), pp. 895-924.
- [34] A. Toom, N. Vasilyev, O. Stavskaya, L. Mityushin, G. Kurdyumov and S. Pirogov. Discrete local Markov systems. *Stochastic Cellular Systems: ergodicity, memory, morphogenesis*. Ed. by R. Dobrushin, V. Kryukov and A. Toom. Nonlinear Science: theory and application, Manchester University Press, (1990), pp. 1-182.
- [35] A. Toom. *Particle systems with variable length*. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, v. 33, n. 3, (2002), pp. 419-425.

- [36] A.D. Ramos. *Processos de Partículas com Comprimento Variável*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, (2007). Veja <http://www.de.ufpe.br/~toom>.
- [37] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Epidemia>.

# Índice Remissivo

- $D$  , 11
- $D^+$  , 11
- $T$  -Anulador, 54
- $\Omega$  , 9
- $\Pi$  , 11
- $\Pi'$  , 11
- $k$  -partículas, 9
- Análogo da Lei dos Grandes Números, 28
- Aplicação  $k$  -Lipschitziana, 44
- Aplicação Linear, 15
- Autoespaço, 50
- Autoespaço Generalizado, 54
- Autovalor, 48
- Autovetor, 48
- Autovetores Generalizados, 54
- Base de Jordan, 56
- Conjunto Compacto, 25
- Conjunto Convexo, 12
- Conjunto Fechado, 24
- Conjunto Limitado, 24
- Convergência quase certa, 16
- Corolário do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, 44
- Diâmetro, 26
- Distância, 10
- Distribuição concentrada em um vetor, 13
- Distribuição de Fato Finita, 11
- Espaço Topológico, 25
- Esperança, 29
- Forma Canônica de Jordan, 52
- Função Contínua, 43
- Lei Fraca dos Grandes Números, 32
- Limite do Processo Estocástico, 36
- Matriz Característica, 47
- Matriz de Jordan, 51
- Matriz Irreduzível, 47
- Matriz não Negativa, 47
- Matriz não Primitiva, 49
- Matriz Positiva, 47
- Matriz Primitiva, 49
- Matriz Reduzível, 47

Medida Invariante, 96  
 Multiplicidade Algébrica, 50  
 Multiplicidade Geométrica, 50  
 Norma de um vetor, 10  
 Operador Aleatório Ergódico, 16  
 Operador de Arredondamento, 22  
 Operador de Normalização, 11  
 Operador Determinístico, 18  
 Operador Determinístico Ergódico, 23  
 Operador Estocástico, 13  
 Operador linear definido em espaços  
     vetoriais, 15  
 Operador linear no conjunto de distri-  
     buições de probabilidade  $\Pi$ , 15  
 Polinômio Característico, 48  
 Polinômio Mínimo, 49  
 Polinômio Mínimo de  $v$ , 54  
 Ponto Aderente, 24  
 Ponto Fixo, 43  
 Processo, 16  
 Processos sem Colisões, 104  
 Raiz Simples, 48  
 Sistemas com Comprimento Variável,  
     94  
 Subcobertura de um conjunto, 25  
 Subespaço  $T$ -cíclico, 54  
 Subespaço Invariante, 53  
 Teorema da Decomposição Cíclica, 56  
 Teorema da Decomposição Primária,  
     53  
 Teorema de Frobenius, 48  
 Teorema de Perron, 48  
 Teorema Principal, 56  
 Topologia, 24  
 Vetor Normalizado, 10  
 Vetor Positivo, 10  
 Vetores Colineares, 56